

由一道磁单极子习题说起

李 聪¹ 何 彬² 黄亦斌³

(¹ 江西省鄱阳中学, 江西 上饶 333100; ² 江西省万载中学, 江西 宜春 336000;

³ 江西师范大学, 江西 南昌 330022)

摘 要 本文以一道关于磁单极子和超导线圈的习题为引子, 深入讨论其背后的各种概念, 包括通量的概念、磁场的特殊性、法拉第电磁感应定律与磁场无源性的关系、超导线圈必须考虑自感的结论以及一些零星注意事项。

关键词 通量; 法拉第电磁感应定律; 磁单极子; 自感; 无始无终

A DISCUSSION STARTING FROM A PROBLEM ON MAGNETIC MONOPOLE

LI Cong¹ HE Bin² HUANG Yibin³

(¹ Poyang Middle School, Shangrao, Jiangxi 333100; ² Wanzai Middle School, Yichun, Jiangxi 336000;

³ Jiangxi Normal University, Nanchang, Jiangxi 330022)

Abstract Starting from a problem on magnetic monopole and superconducting coil, this paper delves into various underlying concepts, including the flux, characteristics of magnetic field, the relation between Faraday law of electromagnetic induction and source-free magnetic field, the necessity of considering self-induction in superconducting coils, and some other noteworthy points.

Key words Flux; Faraday's law of electromagnetic induction; Magnetic monopole; Self-induction; Source-free

作为对电磁感应的训练, 有时会涉及磁单极子^[1]。下面就是其中的一道常见习题(参考答案为 D), 其中还涉及超导线圈:

1931 年英国物理学家狄拉克从理论上预言: 存在只有一个磁极的粒子, 即“磁单极子”。1982 年, 美国物理学家卡布莱拉设计了一个寻找磁单极子的实验: 他设想, 如果一个只有 N 极的磁单极子从左向右穿过如图 1 所示的闭合超导线圈, 那么, 从左向右看, 这个线圈中将出现

A. 先是逆时针方向, 然后是顺时针方向的感应电流

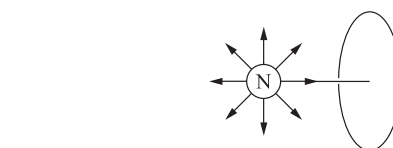


图 1 磁单极子穿过超导线圈

B. 先是顺时针方向, 然后是逆时针方向的感应电流

C. 顺时针方向的持续流动的感应电流

D. 逆时针方向的持续流动的感应电流

常见思路如下: 考虑穿越之前和之后穿过环

收稿日期: 2023-07-16

基金项目: 国家自然科学基金(项目批准号 12564041)。

通信作者: 李聪, poyangzxlicong@163.com。

引文格式: 李聪, 何彬, 黄亦斌. 由一道磁单极子习题说起[J]. 物理与工程, 2025, 35(4): 260-266.

Cite this article: LI C, HE B, HUANG Y B. A discussion starting from a problem on magnetic monopole[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(4): 260-266. (in Chinese)

路的磁通量的变化情况,根据楞次定律,发现感应电流都是逆时针方向,故人选 D。

但若考虑穿越前后的短暂过程,会发现存在磁通量突变^[2,3],变化率为无穷大。按理,此刻该出现顺时针的无穷大电流。真是这样吗?到底该怎么考虑呢?

实际上,文[4]已经给出了详细的回答。本文希望就此充分厘清其背后的各种基本概念,与其互为补充。

1 通量首先是针对面而言的,而不是闭合环路

通量首先是指穿过某个面的通量。两个面即使边界(一条闭合曲线)相同,也可能具有不同的通量,因此讨论通量时必须明确所指的曲面。例如,点电荷的电场中(图 2(a)),三个曲面 S_1 、 S_2 、 S_3 具有相同的边界 L ,但穿过三个曲面的电通量 Φ_1 、 Φ_2 、 Φ_3 满足 $\Phi_1 \neq \Phi_2 = \Phi_3$ 。

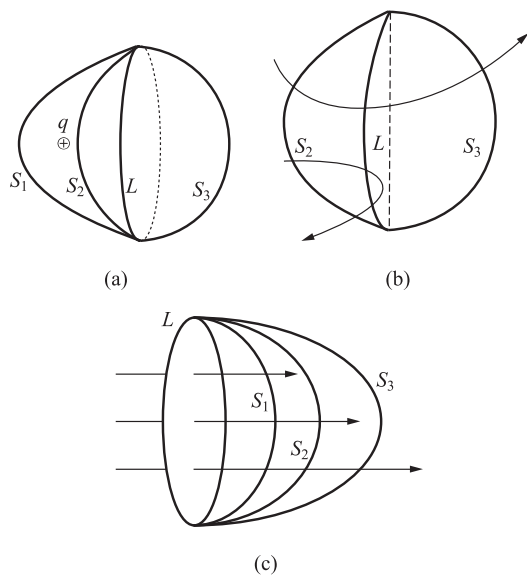


图 2 具有相同边界的曲面

2 磁场特殊,可以对闭合环路谈磁通量

磁场是无源场 ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$), 磁感线无始无终,它穿过某个面后要么继续穿过下一个面,要么穿回来,而不会消失于两面之间(图 2(b))。这导致对任意的闭合面而言,穿入的场线根数总等于穿出的场线根数,而具有相同边界的

不同曲面,穿过它们的通量必然相同。故而,谈论磁通量时,不必告知具体的曲面,只需告知其边界即可。所以我们谈论的是“闭合回路包围的磁通量”,而不再是“穿过某个面的磁通量”。与此相反,电场是有源场(高斯定理),电场线有始有终(始于正电荷,终于负电荷),电场线可以消失于两面之间,故一般不能谈论“闭合回路包围的电通量”,只能谈论原始的“穿过某个面的电通量”。图 2(c)中曲线 L 包围的线有几根? 由于穿过面 S_1 、 S_2 和 S_3 的线的根数互不相同,故而“曲线 L 包围的线”没有意义,只能给定一个曲面,谈论“穿过该曲面的线”。

3 法拉第电磁感应定律的表述依赖于谈论“闭合回路包围的磁通量”的合法性

法拉第电磁感应定律的陈述中有“穿过电路的磁通量”的表述,其中“电路”当然是闭合曲线,故这就是“闭合回路包围的磁通量”。也就是说,当讨论电磁感应时,其大前提是磁感线无始无终。

然而,并不是所有人都能清晰地认识到这一点。比如,曾有人讨论过下面这样的模型(见图 3(a)):匀强磁场止于 AC 平面,矩形线圈绕处于边界的 O 轴旋转,讨论电动势的情况。其实,这样的磁场是不存在的,磁感线必须延伸下去而不能中断。另有一些特殊情况,比如图 3(b)(磁电式电流表中的辐射状磁场)和图 3(c)(有旋转对称性的磁极,圆线圈套在中间部分下落),从切割磁感线的角度容易理解,但从磁通变化的角度不好说明,于是经常有人提问。对此三图的修改或补充见图 3(d)~(f)。此三例都从正面和反面展示了磁感线无始无终这一性质的基础性。

4 磁单极子破坏磁场的无源性,电磁感应定律也受影响,谈磁通又得回到曲面,但各曲面平权

现在回到文首的题目。磁单极子的存在使磁感线变得有始有终,“闭合回路包围的磁通量”不再有意义,必须指定一个面,再谈论“穿过该面的场线和通量”。而非常重要的一个结果是,法拉第电磁感应定律的原有陈述不再成立:“线圈中的感应电动势”仍有意义,但以线圈为边界的不同曲面将有不同的磁通量(参考图 2(c)),故“穿过线圈的

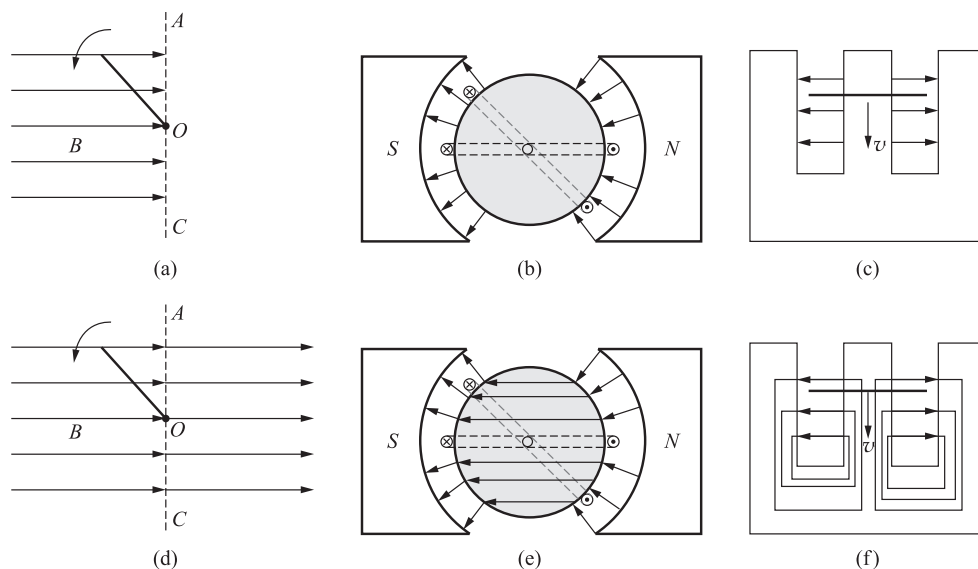


图3 磁感线无始无终

磁通量”已不知所云,“穿过线圈的磁通量的变化率”更是无稽之谈。在文首的“常见思路”中,有“穿过环路的磁通量”字眼,这就已经有问题了,因为此时只有边界没有曲面,谈不了磁通量。

有人会辩称,圆线圈包围的磁通量当然就是指穿过圆盘平面(即图4中的 S_1)的磁通量。此处“当然”二字就表现出概念上的不严谨。首先,不存在被动的“当然”,只能是主动的选择。此处应该是“选择圆盘平面来谈磁通量”。其次,“当然”二字意味着,图4中的圆盘平面 S_1 优于其他曲面,更自然,是当然之选。这就否定了各曲面的平权性,肯定不对。

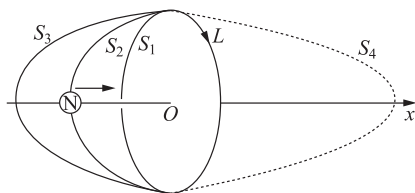


图4 以超导线圈为边界的不同曲面

事实上我们根本不能断定哪个面更自然,更优越。图5(a)是一个圆盘沿直径折 90° 得到的曲面,图5(b)是一张弹性膜紧紧包在刚才这个几何体上得到的曲面。这两个曲面的边界相同,但它们哪个更自然、更优越?图5(c)是一个运动粒子的闭合轨迹,它在 xy 平面内作匀速圆周运动,同时还在 z 方向上作简谐振动。对于这样一根封闭曲线,以它为边界的所有曲面中,哪个面是最自然、最优越的?没有,不存在。所有曲面平权。

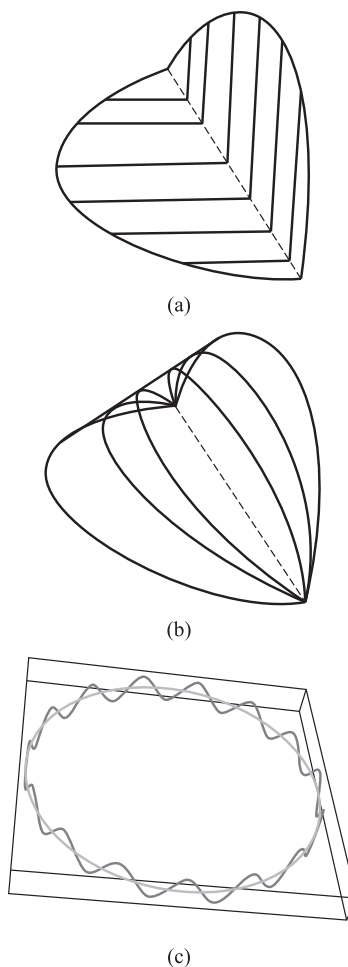


图5 边界相同的各曲面平权

所以,在原题中,当我们谈磁通量时,首先要意识到以圆环为边界的各曲面平权,然后需要选

定某个曲面,这样才能谈磁通量。图4中的四个曲面都可以选,不能说哪个面是唯一选择。实际上,我们后面将看到,选择面 S_4 将简化讨论。当然,通过这四个面的磁通并不都相等。那这一点怎么能跟各面平权相容呢?原来基本定律还要修改,修改完可保证四面平权。

5 含磁单极子的电磁理论

加入了新粒子,那么基本理论需要修改。文[4]已给出了较详细的阐述,此处仅概述其逻辑线条。

麦克斯韦方程组中有两个需要修改。首先要认定磁单极子以平方反比的方式产生径向磁场,跟点电荷产生电场一样。于是有磁高斯定理 $\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m$, $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = Q_m$, 其中 Q_m 为磁荷量, ρ_m 为其体密度。其次,法拉第电磁感应定律需修改为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{J}_m, \quad \mathcal{E} \equiv \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} - I_m \quad (1)$$

其中, $\mathbf{J}_m$ 为磁荷流密度, $\mathcal{E}$ 为静止回路 L 的电动势,而磁通量 $\Phi_B = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 和磁荷流强度 $I_m = \iint \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{S}$ 都是针对以回路 L 为边界的同一个曲面 S 定义的。虽然 $d\Phi_B/dt$ 和 I_m 都与曲面有关,但二者之和对所有曲面都相等,体现了各个面的平权性,就像安培环路定律中电流强度 I 与位移电流 $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$ 之和与曲面无关一样。

式(1)中磁通变化率跟磁荷流强度对等,那么磁通就和磁荷累计通过量对等

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(\Phi_B + q_m) \quad (2)$$

其中, $q_m = \int_{I_m}^t dt$ 为直到当前 t 累计通过曲面 S 的磁荷量。磁通量与磁荷累计通过量之和必然是连续变化的,就像没有磁单极子时磁通量必然连续变化一样。这是由一开始就作出的修改(1)来保证的。以前,我们只谈磁通量 Φ_B ,它与曲面无关,只要曲面的边界确定;现在,我们改谈“通量和” $\Phi_B + q_m$,它也只决定于边界,边界相同的所有曲面的“通量和”都相等。

文[4]讨论了两个通量 Φ_B 和 q_m 与位置的关

系。谈通量必须先谈曲面,文中所针对的面正是可能会被误以为是“唯一选择”的圆盘平面。若约定磁通向右和 N 磁荷从左向右穿过为正(参见图4),则当磁单极子通过圆环中心时,磁通量突减,但正好有等量的磁荷通过这个面,故磁荷累计通过量突增。两因素抵消,使得“通量和”连续变化,最终得到“通量和”跟坐标 x 的函数关系为

$$\Phi_B + q_m = Q_m \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{2\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (3)$$

其中, Q_m 为磁单极子的磁荷, a 为线圈半径,磁单极子在线圈左边时 $x < 0$ 。函数(3)的图像见图6上部分,下部分是其负导数。

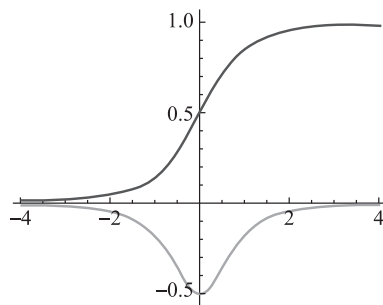


图6 “通量和”与坐标 x 的关系

有没有更简单的定性考虑?前面谈到了图4中各个曲面的平权性。我们可以选择曲面 S_4 ,并让其右顶点尽可能地远。这样,在磁荷未穿过 S_4 之前,即在其穿越 S_1 前后的绝大部分过程内,磁荷累计通过量都为零,于是只要考虑通过 S_4 的磁通量。显然,它是一直连续增加的,故马上可以得到图6所示的“通量和”变化趋势图。

6 思考电磁感应时的常见思路有先天缺陷,仅适用于无自感情形

文首的磁通突变疑难得到解决,剩下的事情似乎就简单了:“通量和”代替磁通,它没有突变,一直增加。根据楞次定律,感应电流一直是逆时针方向。或者,“通量和”变化率大于零,根据法拉第定律,电动势和感应电流应该小于零(图4中 L 的正向与磁通的正向呈右手螺旋关系),故选项D正确。但这种思路是错误的!只有把超导线圈改为普通金属线圈,并注明“忽略自感”,才能适用这种思路。

我们思考电磁感应的常见思路是,有变化的电流产生磁场,于是磁场中的闭合线圈的磁通量

会发生变化,根据楞次定律会出现感应电流。这种思考方式有问题吗?有,因为这里变化的磁通量是互感导致的,而作为一般情形还可能有自感导致的磁通。所以,常见的分析模式是有先天缺陷的,即只适用于自感可忽略的情形,但我们常常意识不到这种缺陷,因为我们对自感比较陌生。文[5]指出了这种缺陷,还批评了楞次定律的通常表述,指出它对我们的误解起到了根本性的作用。文[5]分析了自感不能忽略的一种重要情形——变压器,认识不到常见模式需要无自感而变压器需要考虑自感,就会出各种概念问题。而此处的超导线圈,也是必须考虑自感的!

我们接着上一部分说起。式(2)中,磁通 Φ_B 可以分为两部分: $\Phi_B = \Phi_{\text{互}} + \Phi_{\text{自}}$, 其中 $\Phi_{\text{互}}$ 由磁单极子产生,有源, $\Phi_{\text{互}} + q_m$ 无源。而 $\Phi_{\text{自}} = Li$ 由线圈自身电流产生,一定无源。上一部分最后两段和图6中谈的磁通量,显然都只是互感磁通 $\Phi_{\text{互}}$ 。于是,式(2)可以写为

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d}{dt}(\Phi_{\text{自}} + \Phi_{\text{互}} + q_m) \\ &= -\frac{d}{dt}(\Phi_{\text{互}} + q_m) - L \frac{di}{dt}\end{aligned}\quad (4)$$

其中, $\Phi_{\text{互}} + q_m$ 的变化趋势就是图6。对于线圈(无论是否超导),有含源欧姆定律 $\mathcal{E} = U + ir$ 。由于转一圈的总电压 $U=0$,于是得到

$$L \frac{di}{dt} + ir = -\frac{d}{dt}(\Phi_{\text{互}} + q_m) \quad (5)$$

在我们的常见思路中,感应电流正比于外磁通(互感磁通)的变化率,但这是需要前提的。从式(5)就可以看出,其前提是自感可忽略且有电阻。但对于超导, $r=0$,若自感系数 L 也为零,那么方程(5)就不能成立了。故而,超导环是必须考虑自感的。实际上,由含源欧姆定律,超导环必有任意时刻电动势 $\mathcal{E}=0$ 。根据法拉第定律,穿过回路的磁通(或“通量和”)必须保持不变。而通常互感磁通(或 $\Phi_{\text{互}} + q_m$)是变化的,故必有超导环电流产生的自感磁通要随时抵消互感磁通的变化。这就是文[4]中说的,超导环中的感生电流正比于通过线圈的互感磁通(其中未点明是互感)而不是其变化率。由于互感磁通(或 $\Phi_{\text{互}} + q_m$)最后达到最大,故而过程结束后感应电流达到最大。

除了上面两种极端情况,即如果 $L \neq 0, r \neq 0$, 那么感应电流既不正比于 $\Phi_{\text{互}} + q_m$, 也不正比于

其变化率,而是更复杂。可以具体计算一下。先假设磁单极子在外力作用下以速度 v 匀速运动,于是 $x=vt$ 。将方程(5)无量纲化,电流 i 以 $Q_m v / ar$ 为单位,时间 t 以 L/r 为单位,坐标 x 以 a 为单位,则微分方程(结合式(3))变为

$$k \frac{di}{dx} + i = -\frac{1}{2(1+x^2)^{3/2}} \quad (6)$$

其中所有表示物理量的字母都是无量纲的纯数,

而 $k = \frac{Lv}{ra}$ 也无量纲。 k 取不同值时的图像见图7

(a)。可以看出,如果 Lv 小而 ra 大(如 $k=0.1$),则图像趋于无电感的极端情况;反之(如 $k=50$),则趋于超导线圈的情况。后者在图中看不清,但这并不意味着此时电流很小,因为 ra 很小时电流单位 $Q_m v / ar$ 很大。为看清此时的情况,可以将

电流单位换为 $\frac{Q_m v}{ar} \frac{1}{k} = \frac{Q_m}{L}$, 而式(6)变为

$$\frac{di'}{dx} + \frac{i'}{k} = -\frac{1}{2(1+x^2)^{3/2}} \quad (i' = ki) \quad (7)$$

再重新作图(见图7(b))。由此照样可以看出, k 较小时,电流在达到峰值后衰减很快,而 k 较大时,衰减很慢。由于电阻的存在,电流最终会衰减

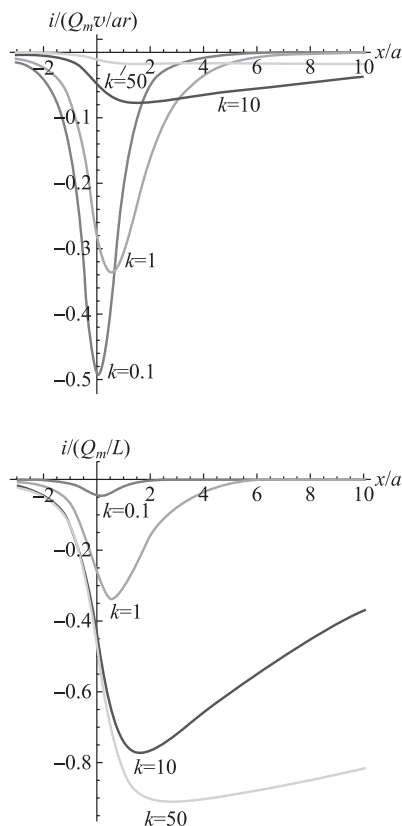


图7 匀速运动前提下电流与时间(坐标)的关系

为零,磁单极子不能留下痕迹。只有在超导线圈时才无衰减,从而留下记录。

7 换系后可使用动生电动势判断

线圈中的电动势有感生和动生两种。上面是线圈系观点,空间中有变化的磁场和电场,线圈静止,其中只有源自感生电场的感生电动势,没有切割磁感线导致的动生电动势。但有人感觉:磁场与线圈存在相对运动,相当于存在切割磁感线,可以用右手定则来判断电动势。这在概念上是不对的^[6]。应该是先换系,才能谈论动生电动势。

在磁单极子静止的粒子系中,磁场不变化,没有磁荷流,没有感生电场存在。线圈运动切割磁感线,因洛伦兹力导致动生电动势。这个电动势与线圈系中得到的电动势应该相等,因为此处默认是低速运动,相对论效应可以忽略。基于这一思路可以得到电动势与位置和速度的关系,其表达式正好是式(3)的负时间导数,即图6下部分的函数与速度之积。

8 几点附注

讨论结束了,但还有一些事情值得一提。

(1) 我们谈论闭合回路的积分(如 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$),在场线无始无终时还谈论闭合回路包围的通量。这里的回路,除了要求闭合外,还要求不与自身相交。这样的曲线叫作约当曲线,闭合回路必须是约当曲线。

(2) 在谈论通量(即各种面积分 $\iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, $\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$, $\iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$)时所针对的曲面也是有要求的,必须是可定向曲面。一个著名的不可定向曲面是莫比乌斯带(见图8(a)),对于它我们无法定义各种通量。

(3) 磁场无源时,我们常说磁感线闭合,其实不妥。注意本文的措辞是“无始无终”,它跟闭合不是一回事。这里不是说延伸至无穷远算不闭合,而是说在有限空间内就有区别。教材^[7]谈了一个例子。如图8(b)所示的两根电流,包围 I_1 的合磁场磁感线将是螺旋线。如果 I_1 与 I_2 的比值

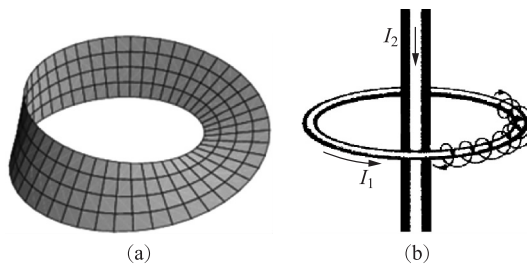


图8 不可定向曲面与非闭合磁感线

(a) 莫比乌斯带; (b) 有限区域内不闭合的磁感线

特殊,磁感线绕 I_2 转一大圈回来后刚好光滑地接上出发点,此时磁感线是闭合的。也可能需要转多圈才能光滑地接上,这都属于闭合,当然比值需是另外的特定值。如果电流比是一般值呢?此时将无论转多少圈都接不上。这就是磁感线无始无终但不闭合的情况。正如无理数比有理数多得多,不闭合磁感线比闭合磁感线也多得多。除了见于教材的理想情况,可以说磁感线基本上都是不闭合的,但全部都无始无终。

9 结语

本文通过分析磁单极子问题,揭示了常规电磁学方法的局限。引入修正的法拉第定律和“通量和”概念,不仅解决了磁通突变疑难,更深化了对电磁理论自洽性的理解。研究表明,超导线圈中自感效应的不可忽略性警示我们,任何物理模型的适用性都依赖于其内在假设。这一认识对准确把握物理概念、理解理论边界具有重要价值。

参 考 文 献

- [1] 李小路. 几个以“磁单极子”为例的复习题[J]. 湖南中学物理, 2017(5):2.
LI X L. Some review questions about magnetic monopole[J]. Hunan Middle School Physics, 2017(5): 2. (in Chinese)
- [2] 席建中. 对寻找磁单极子实验的异议[J]. 宜春学院学报, 2005(S1):251-252.
XI J Z. Dissent on the experiment on searching for magnetic monopoles[J]. Journal of Yichun University, 2005(S1): 251-252. (in Chinese)
- [3] 孟庆庭, 王伟民. 对磁单极子的困惑及原因剖析[J]. 物理教学, 2014, 36(7):3.
MENG Q T, WANG W M. Confusion about the magnetic monopoles and analysis on Causes[J]. Physics Teaching, 2014, 36(7): 3. (in Chinese)
- [4] 赵凯华. 磁单极子与超导线圈问题的困惑[J]. 物理教学,

2009, 31(7): 3-4.

ZHAO K H. Confusion about the problems of magnetic monopole and superconductive coil[J]. Physics Teaching, 2009, 31(7): 3-4. (in Chinese)

- [5] 王建秋, 黄亦斌. 变压器模型的处理方法——兼谈对一道习题的完全剖析[J]. 湖南中学物理, 2022, 37(7): 85-91, 33.

WANG J Q, HUANG Y B. The treatment of transformer model and complete analysis of a problem[J]. Hunan Middle School Physics, 2022, 37(7): 85-91, 33. (in Chinese)

- [6] 黎小鹿, 黄亦斌, 欧阳方平. 运动的磁场? ——兼谈一道高考

题[J]. 物理与工程, 2022, 32(2): 14-19, 24.

LI X L, HUANG Y B, OUYANG F P. The moving magnetic Field? Also on a college entrance examination problem [J]. Physics and Engineering, 2022, 32(2): 14-19, 24. (in Chinese)

- [7] 梁灿彬, 秦光戎, 梁竹健. 电磁学[M]. 4版. 北京: 高等教育出版社, 2018: 148.

LIANG C B, QIN G R, LIANG Z J. Electromagnetism [M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2018: 148. (in Chinese)

(上接第 259 页)

观世界中变量关系和规律的基本数学语言和工具, 在解决实际物理问题中发挥重要作用, 如电容器充电与放电过程、放射性物质的衰变过程、热传导或热衰减过程、电磁波在某些吸收介质中的传播过程、 RL 电路中电源被断开后的电流衰减过程、存在阻尼的机械振动过程, 也会表现出指数衰减的行为。其数学模型通常是一个指数函数, 即物理量随时间的变化遵循指数衰减规律。以电磁感应问题为抓手, 能够帮助学生了解自然界的指数衰减规律图景。

因此以实际物理问题为载体, 开展大中衔接视域下数理跨学科融合教学, 具有重要价值。数理结合, 深入讨论物理实际问题, 既能促进学生深

入认识物理本质, 也能提升学生的数学素养和跨学科思维品质。

参 考 文 献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中物理课程标准(2017年版)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
Ministry of Education of the People's Republic of China. Physics Curriculum Standards for General Senior High Schools (2017 edition) [S]. Beijing: People's Education Press, 2018. (in Chinese)
- [2] 同济大学应用数学系. 高等数学(上册)[M]. 5版. 北京: 高等教育出版社, 2002.
Department of Applied Mathematics, Tongji University. Advanced Mathematics (Volume I) [M]. 5th ed. Beijing: Higher Education Press, 2002.