

大中衔接

大中衔接和数理融合双视域下电磁感应问题深入讨论

秦真科^{1,2} 朱广天^{2,3}

(¹ 上海市浦东教育发展研究院, 上海 200127; ² 华东师范大学教师教育学院, 上海 200062;
³ 集美大学师范学院, 福建 厦门 361021)

摘要 本文针对“电容器+棒”模型, 从物理角度和数学角度, 并结合 Matlab 分析软件, 对含电容充电式电磁感应问题进行了深入讨论。通过动量定理、电容定义式及能量守恒, 从物理角度求解了导体棒运动末状态时的速度 v 、流过导体棒的电量 q 和电路中产生的焦耳热 Q , 只关注最终结果。从数学角度, 通过微分方程求解和积分运算, 分别讨论了电路中的 $I-t$ 规律及导体棒运动的 $v-t$ 规律、流过导体棒的电量 $q-t$ 规律、回路中产生的焦耳热 $Q-t$ 规律, 并在 $t \rightarrow \infty$ 时, 与物理角度讨论所得结果相互验证, 讨论了中间过程的物理规律。数理融合和大中衔接双视域下讨论物理问题, 有助于深入认识物理现象和规律的本质, 培养跨学科思维, 提升解决实际问题的综合能力, 满足不同层次学习需求。

关键词 电磁感应; 数理融合; 微分方程; 定积分

A DEEP DISCUSSION ON ELECTROMAGNETIC INDUCTION FROM THE DUAL PERSPECTIVES OF SECONDARY-TERTIARY EDUCATION INTEGRATION AND MATHEMATICS-PHYSICS INTERDISCIPLINARY FUSION

QIN Zhenke^{1,2} ZHU Guangtian^{2,3}

(¹ Shanghai Pudong Institute of Education Development, Shanghai 200127;
² College of Teacher Education, East China Normal University, Shanghai 200062;
³ Normal College of Jimei University, Xiamen, Fujian 361021)

Abstract This paper presents an in-depth discussion on the charging-type electromagnetic induction problem involving a “capacitor + rod” model, analyzed from both physical and mathematical perspectives with the aid of Matlab. By using the momentum theorem, capacitance definition, and energy conservation, the velocity at the end state of the conductor rod's motion, the amount of electricity flowing through the conductor rod, and the Joule heat generated in the circuit were solved from a physical perspective, focusing only on the final result. From a mathematical perspective, the $I-t$ relationship in circuits, the $v-t$ relationship of con-

收稿日期: 2024-12-18

基金项目: 全国教育科学“十四五”规划教育部青年课题《基于“干涉”主题的高中生量子论和相对论科普课程开发研究》, 课题批准号: EHA220569。2024 年度教育部高等学校大学物理课程教学指导委员会大中物理教育衔接工作委员会教学研究课题《大中衔接视域下高中生“叠加原理”主题教学研究与实践》, 课题批准号: WX202411。

通信作者: 朱广天, binhuzhen@163.com。

引文格式: 秦真科, 朱广天. 大中衔接和数理融合双视域下电磁感应问题深入讨论[J]. 物理与工程, 2025, 35(4): 256-259, 266.

Cite this article: QIN Z K, ZHU G T. A deep discussion on electromagnetic induction from the dual perspectives of secondary-tertiary education integration and mathematics-physics interdisciplinary fusion[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(4): 256-259, 266. (in Chinese)

ductor rod motion, the q - t relationship of electric quantity flowing through the conductor rod, and the Q - t relationship of Joule heating generated in the circuit were discussed through differential equation solving and integration operations. As t approaches infinity, the results obtained from the physical angle discussion were mutually verified, and the physical laws of the intermediate process were discussed. Discussing physics problems from the dual perspectives of integrating mathematics and physics, and bridging the gap between large and medium schools, helps to deepen our understanding of the essence of physical phenomena and laws, cultivate interdisciplinary thinking, enhance our comprehensive ability to solve practical problems, and meet the learning needs of different levels.

Key words electromagnetic induction; mathematics-physics integration; Differential equation; definite integral

电磁感应问题历来是高中物理高考中考察的重点,其综合性较高,主要涉及电磁感应、安培力、牛顿运动定律和动量定理、动量守恒定律及能量守恒定律等知识点。题目要求学生综合运用所学知识,透视题目所给的物理情境,找出各个物理量之间的关系,进行科学的分析、推理和解答。

在电磁感应问题模型讨论中,“电容器+棒”模型又因综合了动量定理、电容充放电和储能、电动势的叠加效应、电磁感应等问题,综合度高,覆盖面广,又能关联电磁炮模型或储能装置情境,在“无情境不命题”的双新改革理念下,备受关注。“电容器+棒”模型一般分为两类:含容充电式电磁感应问题和含容放电式电磁感应问题。含容充电式问题和含容放电式问题都涉及电容器的电量和电压变化,区别在于电容器的充电和放电过程^[1]。

为深入讨论“电容器+棒”模型中的电流、电压、电流、焦耳热等物理量的变化规律,为学有余力的同学提供拓展性学习资源,促进大中衔接视域下数学物理的融合教学,本文以含容放电式电磁感应问题为例,讨论了电路中的 I - t 规律、导体棒运动过程中的 v - t 规律、流过导体棒的电量 q - t 规律、回路中产生的焦耳热 Q - t 规律,能够帮助学生深入认识物理规律,积累跨学科融合视角下探索事物本质、关联和规律的活动经验。

1 原始问题

如图 1 所示,水平面上放置两个互相平行的足够长的金属导轨,间距为 L ,电阻不计,其左端连接一电容为 C 的电容器。导轨处于方向竖直向

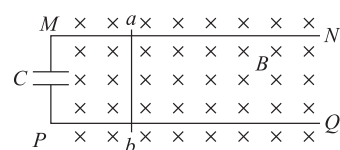


图 1 装置示意图

下的匀强磁场中,磁感应强度大小为 B 。质量为 m 、长度为 L 、阻值为 R 、与导轨接触良好的导体棒 ab 以初速度 v_0 垂直导轨水平向右运动。不计一切摩擦,求:

- (1) 导体棒 ab 稳定以后的速度。
- (2) 导体棒 ab 稳定以后电容器所带电量。
- (3) 导体棒 ab 上产生的总热量。

2 数理解析

2.1 物理角度分析

根据法拉第电磁感应定律和牛顿第二定律,导体棒 ab 向右减速运动,同时产生感应电流并对电容器充电。当感应电动势等于电容器两端电压时,充电完成,电路中电流为 0,此后导体棒 ab 达到稳定的速度 v_1 匀速运动下去。物理角度分析思路见表 1。

表 1 物理原理分析

题序	知识点 洞察	求解方法
第(1)问	电动势 叠加效应	$Blv = \frac{q}{C} \Rightarrow v$
第(2)问	动量定理	$BlL \cdot \Delta t = Blq = mv_0 - mv \Rightarrow q$
第(3)问	能量守恒	$Q = \Delta E_K - Q_{\text{储存}} \Rightarrow Q$

具体求解过程如下:

(1) 导体棒 ab 达到稳定速度后

$$BLv_1 = U = \frac{q}{C} \quad (1)$$

根据动量定理

$$B\bar{I}L \cdot \Delta t = BLq = mv_0 - mv_1 \quad (2)$$

联立式(1)和式(2),可得

$$v_1 = \frac{mv_0}{B^2L^2C + m} \quad (3)$$

(2) 电容器所带电量

$$q = CU = CBLv_1 = \frac{BLCmv_0}{B^2L^2C + m} \quad (4)$$

(3) 根据能量守恒定律,导体棒 ab 上产生的总热量

$$\begin{aligned} Q &= |\Delta E_K| - \frac{1}{2}CU^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}C(BLv_1)^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2} \frac{m^2v_0^2}{B^2L^2C + m} \end{aligned} \quad (5)$$

进一步分析发现,运用动量定理、能量守恒定律解题,只关注最终结果,而没有关注中间过程,但是物体运动的中间过程及所求物理量的瞬时值是怎样的呢?是否可以进一步的拓展研究呢?而这恰是数理跨学科融合学习的支点,也恰是大中衔接教育的支点,见表2。

2.2 数理结合角度

双新背景下,《普通高中数学课程标准》(2017年版2020年修订)对指数函数(必修1)、极限(选择性必修1)、导数与微分(选择性必修1)、定积分(选修课程)等知识做出明确的要求,而电磁感应问题的深入讨论为该部分知识提供了知识应用情境,以该部分知识为跨学科融合主题,能够促进学生深入学习数学原理和物理本质,满足不同层次的学习需求,也能够为拔尖创新人才培养和大中衔接教育提供抓手。

具体求解过程如下:

1) $I-t$ 规律和 $v-t$ 规律

$$I = \frac{BLv - U}{R} = \frac{BLv - \frac{1}{C} \int_0^t I dt}{R} \quad (6)$$

$$v = v_0 - \int_0^t a dt = v_0 - \int_0^t \frac{BIL}{m} dt \quad (7)$$

将式(7)代入式(6)并变形得

$$\begin{aligned} I &= \frac{BL \left(v_0 - \int_0^t \frac{BIL}{m} dt \right) - \frac{1}{C} \int_0^t I dt}{R} \\ &= \frac{BLv_0}{R} - \left(\frac{B^2L^2}{mR} + \frac{1}{CR} \right) \cdot \int_0^t I dt \end{aligned} \quad (8)$$

为分析问题方便,令

$$A = \frac{BLv_0}{R}, P = - \left(\frac{B^2L^2}{mR} + \frac{1}{CR} \right)$$

则式(8)简化为

$$I = A + P \cdot \int_0^t I dt \quad (9)$$

对式(9)两边分别求导可得

$$I' = PI$$

解微分方程可得 I 表达式为^[2]

$$I = ke^{Pt}$$

代入初值条件:当 $t=0$ 时, $I_0 = k = \frac{BLv_0}{R}$, 即

$I-t$ 关系式为

$$I = I_0 e^{Pt} \quad (10)$$

则式(6)变为

$$\begin{aligned} I_0 e^{Pt} &= \frac{BLv - \frac{1}{C} \int_0^t I_0 e^{Pt} dt}{R} \\ &= \frac{BLv - \frac{I_0}{C} \cdot \frac{1}{P} e^{Pt} \Big|_0^t}{R} \\ &= \frac{BLv - \frac{I_0}{C} \cdot \frac{1}{P} (e^{Pt} - 1)}{R} \end{aligned}$$

表2 物理问题的深入追索

题序	知识点洞察	求解方法	批判性分析	可拓展研究
第(1)问	电动势叠加效应	$BLv = \frac{q}{C} \Rightarrow v$	只关注末速度	$v-t$ 关系式
第(2)问	动量定理	$B\bar{I}L \cdot \Delta t = BLq = mv_0 - mv \Rightarrow q$	只关注最终电量	$I-t$ 关系式 $q-t$ 关系式
第(3)问	能量守恒	$Q = \Delta E_K - Q_{\text{储存}} \Rightarrow Q$	只关注最终焦耳热	$Q-t$ 关系式

即

$$R \cdot I_0 e^{Pt} = BLv - \frac{I_0}{C} \cdot \frac{1}{P} (e^{Pt} - 1) \quad (11)$$

由式(11)变形可得 $v-t$ 关系式为

$$v = \left(\frac{RI_0}{BL} + \frac{I_0}{CPBL} \right) e^{Pt} - \frac{I_0}{CPBL} \quad (12)$$

讨论: 因为 $P < 0$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时

$$e^{Pt} \rightarrow 0,$$

$$\begin{aligned} v &= v_1 = -\frac{I_0}{CPBL} = \frac{BLv_0}{RCBL \left(\frac{B^2 L^2}{mR} + \frac{1}{CR} \right)} \\ &= \frac{mv_0}{B^2 L^2 C + m} \end{aligned}$$

从数学角度得到的极限结果与通过物理角度得到的式(3)结果一致, 不难发现达到最终速度是 $t \rightarrow +\infty$ 时的结果, 而不是某一个具体时刻, 这能够促进学生科学的认识该导体棒的运动过程, 真正学习到物理本质问题。

通过 Matlab 数学分析软件, 可得 $I-t$ 关系式式(10)、 $v-t$ 关系式(12)对应的图像如图 2 所示(为研究方便, B, L, m, R, C, v_0 均取 1, 下图皆同)。

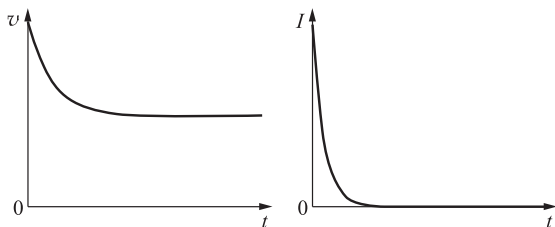


图 2 $v-t$ 和 $I-t$ 关系曲线

2) $q-t$ 规律

对式(10)积分可得电量 q

$$q = \int_0^t I dt = \int_0^t I_0 e^{Pt} dt = I_0 \frac{1}{P} (e^{Pt} - 1) \quad (13)$$

讨论: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时

$$e^{Pt} \rightarrow 0,$$

$$q = I_0 \cdot \frac{1}{P} (0 - 1) = -I_0 \cdot \frac{1}{P} = \frac{BLCmv_0}{B^2 L^2 C + m}$$

从数学角度得到的极限结果与通过物理角度得到的式(4)结果一致, 充电完成理论上也是在 $t \rightarrow +\infty$ 时。

通过 Matlab 数学分析软件, 可得 $q-t$ 关系式(13)的图像如图 3 所示。

3) $Q-t$ 规律

通过积分求导体棒 ab 产生的热量

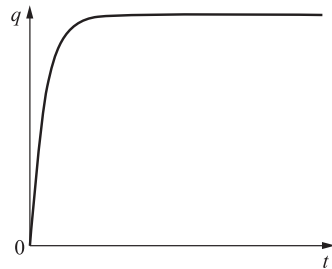


图 3 $q-t$ 关系曲线

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^t I^2 R dt = \int_0^t I_0^2 e^{2Pt} R dt \\ &= I_0^2 R \cdot \frac{1}{2P} (e^{2Pt} - 1) \end{aligned} \quad (14)$$

讨论: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时

$$e^{Pt} \rightarrow 0,$$

$$\begin{aligned} Q &= I_0^2 R \cdot \frac{1}{2P} (0 - 1) = -I_0^2 R \cdot \frac{1}{2P} \\ &= \frac{B^2 L^2 C m v_0^2}{2(B^2 L^2 C + m)} \end{aligned}$$

从数学角度得到的极限结果与通过物理角度得到的式(5)结果一致, 理论上在 $t \rightarrow +\infty$ 整个运动过程中都会不断产生焦耳热。

通过 Matlab 数学分析软件, 可得 $Q-t$ 关系式(14)的图像如图 4 所示。

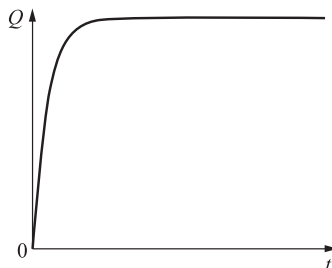


图 4 $Q-t$ 关系曲线

3 结语

深入分析电磁感应问题中的物理规律: 运动的 $v-t$ 关系式、电流的 $I-t$ 关系式、流经导体棒电量的 $q-t$ 关系式、热量 $Q-t$ 关系式, 即分析任一时刻的 v, I, q, Q , 满足分层教学需求, 需要从数理融合角度深入讨论该问题。

由式(10)(12)(13)(14)可知, $I-t, v-t, q-t, Q-t$ 关系式均为 e 的指数函数。指数函数是描述客

(下转第 266 页)

2009, 31(7): 3-4.

ZHAO K H. Confusion about the problems of magnetic monopole and superconductive coil[J]. Physics Teaching, 2009, 31(7): 3-4. (in Chinese)

- [5] 王建秋, 黄亦斌. 变压器模型的处理方法——兼谈对一道习题的完全剖析[J]. 湖南中学物理, 2022, 37(7): 85-91, 33.

WANG J Q, HUANG Y B. The treatment of transformer model and complete analysis of a problem[J]. Hunan Middle School Physics, 2022, 37(7): 85-91, 33. (in Chinese)

- [6] 黎小鹿, 黄亦斌, 欧阳方平. 运动的磁场? ——兼谈一道高考

题[J]. 物理与工程, 2022, 32(2): 14-19, 24.

LI X L, HUANG Y B, OUYANG F P. The moving magnetic Field? Also on a college entrance examination problem [J]. Physics and Engineering, 2022, 32(2): 14-19, 24. (in Chinese)

- [7] 梁灿彬, 秦光戎, 梁竹健. 电磁学[M]. 4版. 北京: 高等教育出版社, 2018: 148.

LIANG C B, QIN G R, LIANG Z J. Electromagnetism [M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2018: 148. (in Chinese)

(上接第 259 页)

观世界中变量关系和规律的基本数学语言和工具, 在解决实际物理问题中发挥重要作用, 如电容器充电与放电过程、放射性物质的衰变过程、热传导或热衰减过程、电磁波在某些吸收介质中的传播过程、 RL 电路中电源被断开后的电流衰减过程、存在阻尼的机械振动过程, 也会表现出指数衰减的行为。其数学模型通常是一个指数函数, 即物理量随时间的变化遵循指数衰减规律。以电磁感应问题为抓手, 能够帮助学生了解自然界的指数衰减规律图景。

因此以实际物理问题为载体, 开展大中衔接视域下数理跨学科融合教学, 具有重要价值。数理结合, 深入讨论物理实际问题, 既能促进学生深

入认识物理本质, 也能提升学生的数学素养和跨学科思维品质。

参 考 文 献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中物理课程标准(2017年版)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
Ministry of Education of the People's Republic of China. Physics Curriculum Standards for General Senior High Schools (2017 edition) [S]. Beijing: People's Education Press, 2018. (in Chinese)
- [2] 同济大学应用数学系. 高等数学(上册)[M]. 5版. 北京: 高等教育出版社, 2002.
Department of Applied Mathematics, Tongji University. Advanced Mathematics (Volume I) [M]. 5th ed. Beijing: Higher Education Press, 2002.