

多元二维微结构的制作方法及其进行衍射测量与验证的系统

刘会玲¹ 赵云芳^{1,2} 韩星星^{1,2} 牛海波^{1,2} 石 鲸^{1,2} 赵 蓓^{1,2}

(¹ 西安交通大学城市学院, 陕西 西安 710018;

² 光伏技术与系统陕西省高校工程研究中心, 陕西 西安 710018)

摘 要 在自然界中, 多元多维结构更为普遍, 这些不同类型的多元微结构, 使材料表现出不同的物性, 其衍射图样也表现出显著的差异, 但这些微结构不容易采集, 衍射图不容易得到。本文利用 CAD 精确设计且利用精度 0.01mm 的精密激光打孔机制作了 4 类共 12 种二维周期和无序微孔结构, 分别为: 大小不同的圆孔二维周期结构 3 种以及形状不同的二维周期结构 3 种、二维六孔结构(苯环结构)3 种、二维无序分布结构 3 种。本文还推出了 12 种结构衍射光强表达式, 为软件编程提供了理论依据。然后通过实验测量和 Matlab 编程仿真两种方式得到衍射图案, 验证并对比其衍射图, 从而研究其夫琅禾费衍射特点, 并测量结构参数。本文提供的多元二维微结构的制作方法及其进行衍射测量与验证的系统, 可在普通环境下进行精密的衍射测量与验证, 为研究各种微结构、晶体结构及非晶体结构提供低成本、低实验环境要求的研究方法。

关键词 夫琅禾费衍射; 傅里叶变换; 多元二维微结构; Matlab

THE FABRICATION METHOD OF MULTI-DIMENSIONAL TWO-DIMENSIONAL MICROSTRUCTURES AND A SYSTEM FOR DIFFRACTION MEASUREMENT AND VERIFICATION

LIU Huiling¹ ZHAO Yunfang^{1,2} HAN Xingxing^{1,2} NIU Haibo^{1,2} SHI Jing^{1,2} ZHAO Bei^{1,2}

(¹ Xi'an Jiaotong University City College, Xi'an, Shaanxi 710018;

² Engineering Research Center of Photovoltaic Technologies and Systems, Universities of Shaanxi Province, Xi'an, Shaanxi 710018)

Abstract In nature, there are more diverse and multidimensional structures. These different types of microstructures endow materials with distinct physical properties, and their diffraction patterns also show significant differences. However, these microstructures are not easy to obtain, and their diffraction patterns are difficult to acquire. In this paper, four cate-

收稿日期: 2024-04-05

基金项目: 陕西省教育科学“十四五”规划 2021 年度课题(SGH21Y0425); 西安交通大学城市学院第十一批教改项目(111006); 西安交通大学城市学院第二批课程思政专项研究项目(KCSZ02036); 西安交通大学城市学院第二批课程思政示范课程和教学团队项目(KCSZSF2306)。

通信作者: 赵云芳, 63892227@qq.com。

引文格式: 刘会玲, 赵云芳, 韩星星, 等. 多元二维微结构的制作方法及其进行衍射测量与验证的系统[J]. 物理与工程, 2025, 35(4): 206-220.

Cite this article: LIU H L, ZHAO Y F, HAN X X, et al. The fabrication method of multi-dimensional two-dimensional microstructures and a system for diffraction measurement and verification[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(4): 206-220. (in Chinese)

gories of 12 two-dimensional periodic and disordered microhole structures were precisely designed using CAD and manufactured with a precision laser drilling machine with an accuracy of 0.01 mm. These structures include: three types of two-dimensional periodic structures with different sizes of circular holes, three types of two-dimensional periodic structures with different shapes, three types of two-dimensional hexagonal hole structures (benzene ring structures), and three types of two-dimensional disordered structures. The diffraction intensity expressions for the 12 structures are derived, providing a theoretical basis for software programming. Then, the diffraction patterns are obtained through experimental measurement and Matlab programming simulation, and the Fraunhofer diffraction characteristics are studied by comparing and verifying the diffraction patterns to measure the structural parameters. The method for fabricating diverse two-dimensional microstructures and the system for diffraction measurement and verification provided in this paper can be carried out in a common environment, offering a low-cost and low-experimental-environment-demand research method for studying various microstructures, crystalline structures, and amorphous structures.

Key words Fraunhofer diffraction; Fourier transform; diverse two-dimensional microstructures; Matlab

自然界中,多元多维结构更为普遍,多元指众多单元(全同、不同),多维指(二维、三维)。在凝聚态物质中,存在着由众多全同单元组成的结构,分布为有序(规则、不规则)结构、无序(规则、不规则)结构^[1]。凝聚态物质可分为晶体、非晶体等。晶体是指具有周期性排列的原子或分子结构^[2]。非晶体是原子或分子结构无序的物质,缺乏明确的晶体结构。在教学中研究晶体、非晶体多采用X射线衍射,仪器昂贵、样品受限、安全要求高,而且教学级的仪器测量效果不理想,这使得在普通环境下研究微结构存在困难。因三维晶体无论沿哪个方向考察,均具有严格的周期性,所以晶体可以看作是不同取向二维晶面的结合,二维晶面可以作为波的衍射光栅,选择适当波长的光入射到晶体上就可能观察到衍射现象,通过对不同方向晶面族衍射现象分析,就可以了解晶体内部原子的排列情况,为晶体结构的确定奠定了基础,所以晶体结构可以通过研究二维周期结构的衍射来了解。非晶体是原子或分子结构无序的物质,缺乏明确的晶体结构,非晶体可以通过研究二维无序结构的衍射来了解。所以研究多元二维微结构的衍射与干涉具有重要的意义。衍射图样敏感地反映了物质结构,通过分析物质的衍射图样就可以认识微结构。然而,任意形状的多元二维微结构

(如:二维周期结构、二维无序结构等)不易采集和获得,衍射图不容易得到;再加上对微结构进行分析和预测,还需要借助实验和软件模拟结合进行对比研究。

针对以上研究困难,本文提供了一种多元二维结构的制作方法及其进行衍射测量与验证的系统,以解决上述问题。通过精密激光打孔机制作任意形状的多元二维结构微孔,采用实验和软件模拟两种方式采集二维结构衍射图,验证并对比,研究其夫琅禾费衍射特点,测结构参数(如孔间距、孔径)等。本文提供的多元二维结构制作方法容易实现且精度高,多元二维结构均为物理结构的实物,具有容易制作、精度高、成本低、不易损伤、易于测量、携带方便等优点,适用于在任何光学衍射实验或系统中使用。同时可在普通环境下进行精密的衍射测量与验证。从而为研究晶体结构、非晶体结构提供低成本、低实验环境要求的方法,也为认识和研究二维微结构提供方法。

1 研究方案

首先使用CAD精确设计了4类共12种全同单元的周期和无序的二维微孔结构。分别为:(1)大小

不同的圆孔二维周期结构 3 种(2)不同形状的二维周期结构 3 种(3)二维六孔结构^[3](苯环结构)3 种(4)二维无序分布结构 3 种 D1~D3。

然后,采用精度 0.01mm 的精密激光打孔机,在 0.5mm 厚的黑色钢板上打孔^[4],打孔面积为 1mm×1mm~1cm×1cm 不等,制作二维微结构。

通过实验(傅里叶变换光路+数码相机采集)和 Matlab 软件模拟两种方式,验证并对比分析,研究其夫琅禾费衍射特点,测结构参数,为认识和研究二维微结构提供方法。

整体研究思路见图 1。

2 二维结构的设计与制作

设计并制作了 4 类共 12 种多元二维结构。其中,二维周期结构 2 类:大小不同的圆孔方阵 3 种 A1~A3 的结构参数、设计结构图及实物图见图 2;不同形状孔方阵 3 种 B1~B3 的结构参数、设计结构图及实物图见图 3。二维六孔结构(苯环结构)3 种 C1~C3 的结构参数、设计结构图及实物图见图 4。二维无序分布结构 3 种 D1~D3 的结构参数、设计结构图及实物图见图 5。

3 二维结构衍射的实验研究和 Matlab 仿真验证分析

3.1 实验研究

3.1.1 傅里叶变换光路

要在较近距离实现物体远场衍射,可以采用透镜来实现物体的傅里叶变换,其变换依据图见图 6 所示。图中: λ 为照射光波长, P_1 为输入图像,变换透镜 L 距离 P_1 为 d_0 , f 为变换透镜 L 的焦距, P_2 为衍射图像, P_1 、 P_2 坐标分别为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 。

当 $d_0 = f$ (即物体处于透镜前焦面)时,后焦面上的光场分布即为物体的傅里叶变换。本实验利用图 6 设计装置和光路。

3.1.2 实验装置和光路

根据傅里叶变换光路设计本实验光路见图 7 所示。激光器产生的光,经衰减片减弱光强度,再经过空间滤波器去除光的高阶模和噪声得到高质量的激光,经过焦距 f_0 的准直镜 L_1 将光束转变为平行光,通过光阑控制光束大小,覆盖于目标物上发生衍射,衍射光束经焦距 f_1 的变换透镜会聚,相机靶面处于变换透镜后焦面上,相机与电脑相

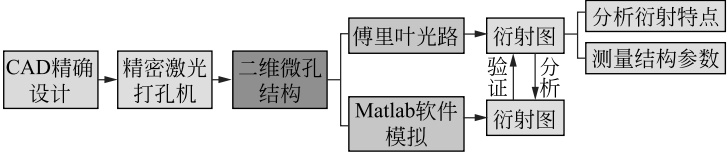


图 1 研究思路

序号	二维结构参数	CAD 设计的结构	放大后的打孔实物图
A1	圆孔半径 $R=0.05\text{mm}$ 矩形阵列: $0.4\text{mm}\times0.6\text{mm}$		
A2	圆孔半径 $R=0.10\text{mm}$ 矩形阵列: $0.4\text{mm}\times0.6\text{mm}$		
A3	圆孔半径 $R=0.15\text{mm}$ 矩形阵列: $0.4\text{mm}\times0.6\text{mm}$		

图 2 大小不同的圆孔方阵 3 种 A1~A3 的结构参数、设计结构图及实物图

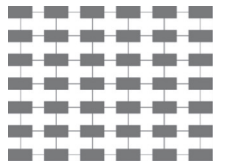
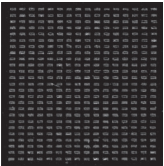
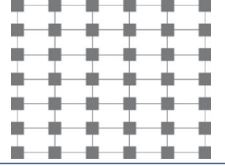
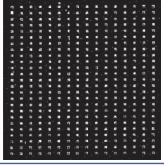
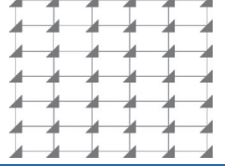
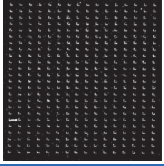
序号	二维结构参数	CAD 设计的结构	放大后的打孔实物图
B1	长方孔: $a \times b = 0.4\text{mm} \times 0.2\text{mm}$ 矩形阵列: $0.4\text{mm} \times 0.6\text{mm}$		
B2	正方孔: 边长 $a = 0.2\text{mm}$ 矩形阵列: $0.4\text{mm} \times 0.6\text{mm}$		
B3	等腰直角三角孔: 直角边长 $a = 0.2\text{mm}$ 矩形阵列: $0.4\text{mm} \times 0.6\text{mm}$		

图3 不同形状孔方阵3种 B1~B3 的结构参数、设计结构图及实物图

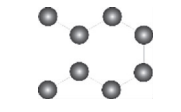
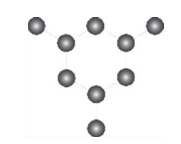
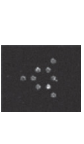
序号	二维结构参数	CAD 设计的结构	放大后的打孔实物图
C1	六方排列圆孔+中心大圆孔 六方排列圆孔: 孔半径 $R_1 = 0.1\text{mm}$ 、半径 $D_1 = 0.5\text{mm}$ 中心大圆孔: 孔半径 $R_c = 0.2\text{mm}$		
C2	六方排列圆孔+外围两圆孔 六方排列圆孔: 孔半径 $R_1 = 0.1\text{mm}$ 、半径 $D_1 = 0.5\text{mm}$ 外围两圆孔: 孔半径 $R_2 = 0.1\text{mm}$ 、半径 $D_2 = 0.9\text{mm}$		
C3	六方排列圆孔+外围对称分布三圆孔 六方排列圆孔: 孔半径 $R_1 = 0.1\text{mm}$ 、半径 $D_1 = 0.5\text{mm}$ 外围对称分布三圆孔: 120° 对称分布, 孔半径 $R_2 = 0.1\text{mm}$ 、 半径 $D_2 = 0.9\text{mm}$		

图4 二维六孔结构(苯环结构)3种 C1~C3 的结构参数、设计结构图及实物图

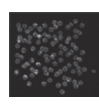
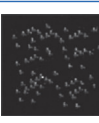
序号	二维结构参数	CAD 设计的结构	放大后的打孔实物图
D1	圆随机孔: 孔半径 $R = 0.1\text{mm}$		
D2	正方随机孔: 边长 $a = 0.1\text{mm}$		
D3	十字随机孔: 十字臂长 $L = 0.1\text{mm}$, 臂宽 $w = 0.02\text{mm}$		

图5 二维无序分布结构3种 D1~D3 的结构参数、设计结构图及实物图

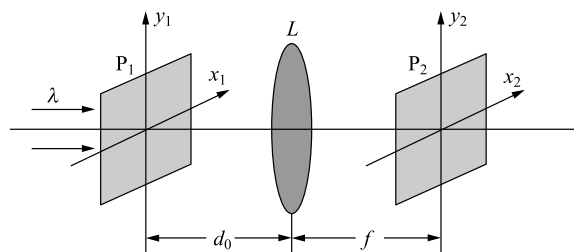


图6 透镜的傅里叶变换依据图

连接,通过软件即可观察到目标物的衍射图样。

根据光路配置实验装置,实验装置图如图8所示,从左到右的光学元器件依次为:固体激光器,为实验提供(532nm)激光光源。圆形可调衰减器,可削弱激光光强。偏振片以减弱光强。空间滤波器,可去除图像中的高阶模和噪声、提高激光质量。焦距 $f_0=100\text{mm}$ 的准直凸透镜,可将空间滤波器中出来的光束转变为平行光。光阑,控制光束大小,使其覆盖于目标物上。光线经过目标物发生衍射,衍射光束经焦距 $f_1=200\text{mm}$ 的变换透镜会聚,当相机靶面处于变换透镜后焦面上时,相机与电脑相连,通过运行 Mind'Visio 测量软件可观察到采集的衍射图样。

3.1.3 光路搭建与数据采集

首先布置暗室。为了使衍射现象更明显更稳

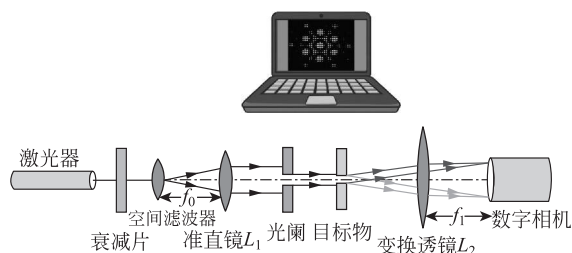


图7 实验光路图

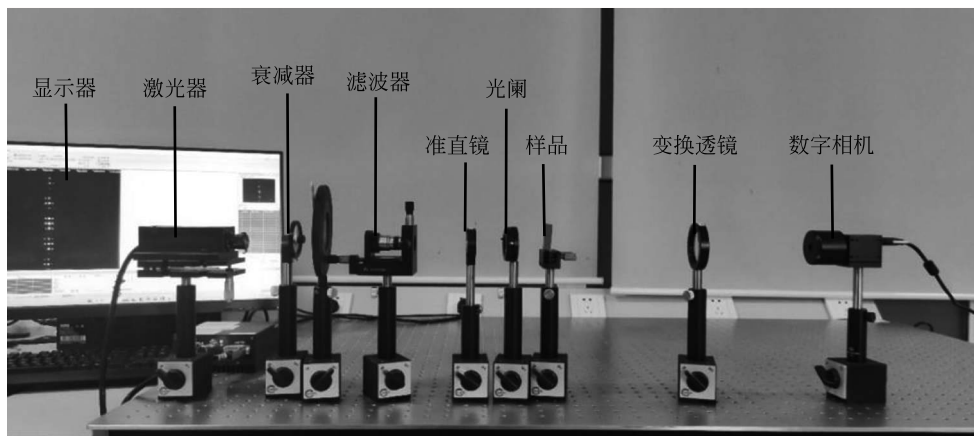


图8 实验装置图

定,可关闭其他光源减小杂光的干扰。在明室下实验现象亦可观察到,但为避免背景光的影响,建议于暗室中进行实验测量。

接下来,根据实验装置图,摆放元器件到对应位置。然后打开激光光源。调整激光器水平,使激光束与光学平台平行。调整空间滤波器,使物镜出射的光斑打在光阑中间,安装针孔,调整空间滤波器的三维旋钮使物镜的聚焦光斑与小孔重合,达到滤波效果。调整准直镜的高低,使出射光入射到光阑中间,前后移动准直镜观察光斑大小,远处近处光斑大小不变。调整光阑大小约 10mm,入射目标图案。调整变换透镜位置,使入射光斑入射透镜中心。运行“MindVisio 测量软件”,连接好相机,进入衍射图样采集界面,调整相机位置,使入射光打在相机靶面中间,当相机靶面处于透镜后焦面时,即可观察到衍射图样,如图9所示。

3.2 软件研究

本部分采用 Matlab 软件编写程序^[5],用于测量二维结构的衍射图样和光强分布,并与实验得到的衍射图案进行对照分析,以验证得到的实验结论。不同结构衍射的物理原理是编程的依据,首先了解二维结构夫琅禾费衍射,二维结构夫琅禾费衍射是单孔衍射和多孔干涉的总体效果。设一波长为 λ 的平行光正入射于二维结构上,其夫琅禾费衍射场一般形式为

$$\tilde{U}(\theta_1, \theta_2) = \tilde{u}_0(\theta_1, \theta_2) \cdot \tilde{S}(\theta_1, \theta_2) \quad (1)$$

$$\tilde{S}(\theta_1, \theta_2) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(\delta_1 + \delta_2)} \quad (2)$$

其中, $\tilde{u}_0(\theta_1, \theta_2)$ 为单元因子或形状因子,取决于单元的形貌。而 $\tilde{S}(\theta_1, \theta_2)$ 为单元之间干涉因子,取决于单元的空间分布,简称其为结构因子或分

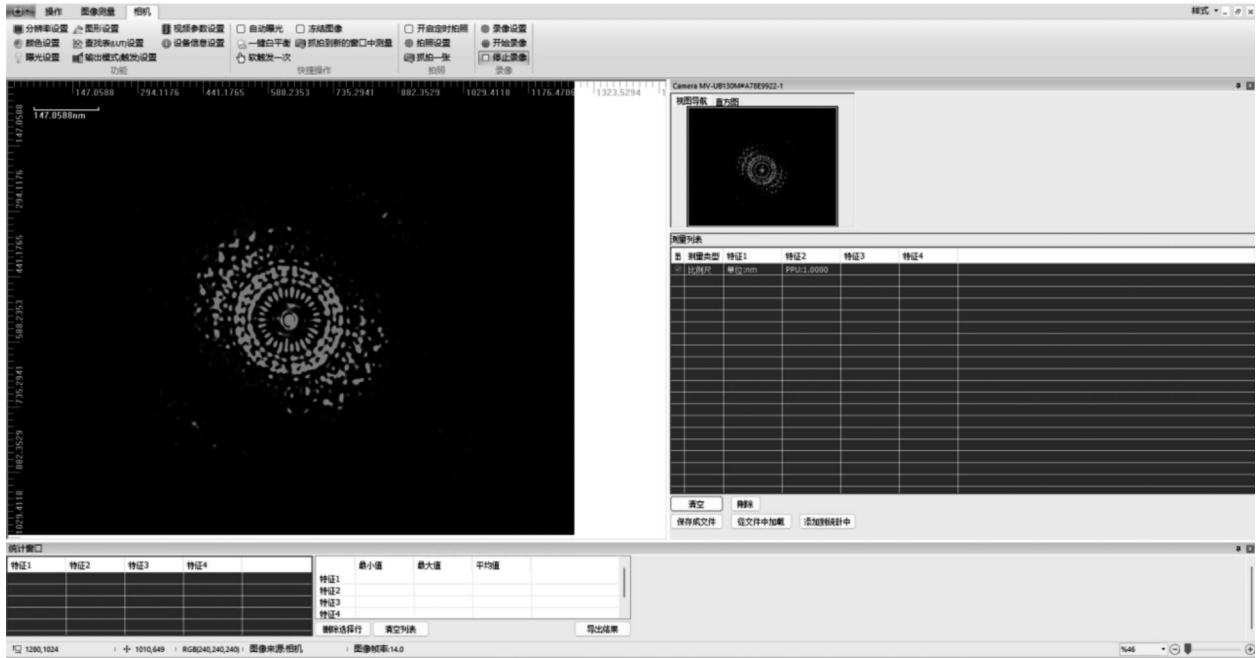


图9 MindVisio 测量软件中观察的衍射图样

布因子。二维周期结构的衍射场,其主要特征分别决定于这两个因子。对于一维周期结构、二维周期结构及二维无序结构差别在 $\tilde{S}(\theta_1, \theta_2)$ 上^[1]。

3.2.1 一维周期结构的夫琅禾费衍射

为了便于理解,下面由一维光栅衍射的夫琅禾费衍射场,推出不同形状的一维周期结构夫琅禾费衍射场,然后再由一维周期结构衍射推出二维周期结构、二维无序结构的夫琅禾费衍射场。

1) 一维光栅衍射

一维光栅是由等距、等宽度的平行狭缝组成。设光栅狭缝数目为 N ,透光宽度为 a ,挡光宽度为 b ,则光栅常数 $d = (a + b)$ 。当平行光垂直入射时, θ_1 为衍射角,其单元衍射因子 $\bar{u}_0$,衍射场 $\mathcal{F}$ 为

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\theta_1) &= \bar{u}_0(\theta_1) \cdot \tilde{S}(\theta_1) \\ &= \bar{c} \left(\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} \right) \cdot \left(\frac{\sin N\beta_1}{\sin \beta_1} \right) e^{i(N-1)\beta_1} \\ \alpha_1 &= \frac{\pi a \sin \theta_1}{\lambda}, \quad \beta_1 = \frac{\pi d \sin \theta_1}{\lambda}\end{aligned}$$

相应的衍射强度分布为

$$I(\theta_1) = |\bar{u}_0|^2 \cdot |\tilde{S}|^2 = i_0 \left(\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\beta_1}{\sin \beta_1} \right)^2 \quad (3)$$

其中,第一项为单个狭缝的衍射光强,称为强度单元因子。第二项为多条狭缝的强度干涉因子,也称强度结构因子, i_0 为单缝衍射零级中心处的光强^[6,7]。

其他形状一维周期结构(如圆形、正方形、等边三角形等)与一维光栅衍射类似,虽然各自有着不同的单元形貌,但具有相同的结构特征,周期结构的维数等于结构因子的维数。所以他们所产生的衍射场 $\mathcal{F}$,具有相同的结构因子

$$\tilde{S}(\theta_1) = \left(\frac{\sin N\beta_1}{\sin \beta_1} \right) e^{i(N-1)\beta_1}, \quad \beta_1 = \frac{\pi d \sin \theta_1}{\lambda}$$

其中, d 是相邻单元中心的距离, N 为单元的数目。当平行光垂直入射, θ_1 为衍射角,不同孔型所产生的衍射场是二维的,衍射图样铺展于后焦面的二维平面上,而 $\tilde{S}(\theta_1)$ 是一元函数。

2) 一维周期圆孔的衍射

如果把光栅的狭缝换成一个个圆孔,就变成多个圆孔衍射屏。圆孔衍射场单元因子为

$$\bar{u}_0(\theta_1, \theta_2) = c_1 \left(\frac{2J_1(\alpha_1)}{\alpha_1} \right)$$

衍射场 $\mathcal{F}$ 为

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\theta_1, \theta_2) &= \bar{u}_0(\theta_1, \theta_2) \cdot \tilde{S}(\theta_1) \\ &= c_1 \left(\frac{2J_1(\alpha_1)}{\alpha_1} \right) \cdot \left(\frac{\sin N\beta_1}{\sin \beta_1} \right) e^{i(N-1)\beta_1} \\ \alpha_1 &= \frac{2\pi R \sin \theta_1}{\lambda}, \quad \beta_1 = \frac{\pi d \sin \theta_1}{\lambda}\end{aligned}$$

相应的衍射强度分布为

$$\begin{aligned}I(\theta_1, \theta_2) &= |\bar{u}_0(\theta_1, \theta_2)|^2 \cdot |\tilde{S}(\theta_1)|^2 \\ &= i_0 \left(\frac{2J_1(\alpha_1)}{\alpha_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\beta_1}{\sin \beta_1} \right)^2 \quad (4)\end{aligned}$$

其中,第一项是单个圆孔的夫琅和费衍射光强,第二项圆孔间的强度干涉因子, $J_1(\alpha_1)$ 是 α_1 的一阶贝塞尔函数, R 为圆孔半径。 θ_1 为衍射角度, λ 为入射光波长。

3) 一维周期长方孔的衍射

同理,长方形孔的衍射场 $\mathcal{F}$ 为

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\theta_1, \theta_2) &= \tilde{u}_0(\theta_1, \theta_2) \cdot \tilde{S}(\theta_1) \\ &= c_2 \left(\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} \right) \left(\frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} \right) \cdot \left(\frac{\sin N \beta_1}{\sin \beta_1} \right) e^{i(N-1)\beta_1}\end{aligned}$$

$$\text{其中, } \alpha_1 = \frac{\pi a \sin \theta_1}{\lambda}, \alpha_2 = \frac{\pi b \sin \theta_2}{\lambda}, \beta_1 = \frac{\pi d \sin \theta_1}{\lambda}$$

θ_1 为 x 方向衍射角度, θ_2 为 y 方向衍射角度, λ 为入射光波长。

相应的衍射强度分布为

$$\begin{aligned}I(\theta_1, \theta_2) &= |\tilde{u}_0(\theta_1, \theta_2)|^2 \cdot |\tilde{S}(\theta_1)|^2 \\ &= i_0 \left(\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} \right)^2 \left(\frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N \beta_1}{\sin \beta_1} \right)^2 \quad (5)\end{aligned}$$

4) 一维周期正方孔的衍射

正方形孔的衍射是长方形孔衍射的特殊情况,则正方形孔衍射场 $\mathcal{F}$ 为

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\theta_1, \theta_2) &= \tilde{u}_0(\theta_1, \theta_2) \cdot \tilde{S}(\theta_1) \\ &= c_3 \left(\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} \right) \left(\frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} \right) \cdot \left(\frac{\sin N \beta_1}{\sin \beta_1} \right) e^{i(N-1)\beta_1}\end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi a \sin \theta_1}{\lambda}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi a \sin \theta_2}{\lambda}, \quad \beta_1 = \frac{\pi d \sin \theta_1}{\lambda}$$

其中, θ_1 为 x 方向衍射角度, θ_2 为 y 方向衍射角度, λ 为入射光波长。

相应的衍射强度分布为

$$\begin{aligned}I(\theta_1, \theta_2) &= |\tilde{u}_0(\theta_1, \theta_2)|^2 \cdot |\tilde{S}(\theta_1)|^2 \\ &= i_0 \left(\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} \right)^2 \left(\frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N \beta_1}{\sin \beta_1} \right)^2 \quad (6)\end{aligned}$$

5) 一维周期等腰直角三角孔的衍射

一维周期屏的单元为等腰直角三角形(直角边为 a)衍射场为

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\theta_1, \theta_2) &= \tilde{u}_0(\theta_1, \theta_2) \cdot \tilde{S}(\theta_1, \theta_2) \\ &= c_4 \left[\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) e^{-i(\alpha_1 + \alpha_2)} \text{sinc}(\alpha_1 - \alpha_2) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\alpha_1} e^{-i\alpha_2} \text{sinc}(\alpha_2) - \frac{1}{\alpha_2} e^{-i\alpha_1} \text{sinc}(\alpha_1) \right] e^{i \left(k_f + \frac{f}{k} \left[\left(\frac{a_1}{a} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{b} \right)^2 \right] \right)} \cdot \\ &\quad \left(\frac{\sin N_1 \beta_1}{\sin \beta_1} \right) e^{i(N_1-1)\beta_1}\end{aligned}$$

其中

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \alpha_1 = \frac{\pi a \sin \theta_1}{\lambda}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi a \sin \theta_2}{\lambda}, \quad \beta_1 = -\frac{\pi d_1 \sin \theta_1}{\lambda}$$

衍射场强度分布为

$$\begin{aligned}I(\theta_1, \theta_2) &= i_0 \left[\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) e^{-i(\alpha_1 + \alpha_2)} \text{sinc}(\alpha_1 - \alpha_2) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\alpha_1} e^{-i\alpha_2} \text{sinc}(\alpha_2) - \frac{1}{\alpha_2} e^{-i\alpha_1} \text{sinc}(\alpha_1) \right]^2 \cdot \left(\frac{\sin N_1 \beta_1}{\sin \beta_1} \right)^2 \quad (7)\end{aligned}$$

3.2.2 二维周期结构的夫琅禾费衍射

二维周期结构,在凝聚态物理中可称其为二维晶片,如图10所示,沿 x 方向的空间周期为 d_1 ,共有 N_1 列;沿 y 方向的空间周期为 d_2 ,共有 N_2 行,包含 $(N_1 \times N_2)$ 个全同单元,排列规则且取向有序^[1]。

二维周期结构衍射可以看成两个正交的一维周期结构衍射的叠加,总的强度分布是两个正交的一维周期结构衍射光强的乘积^[1]。

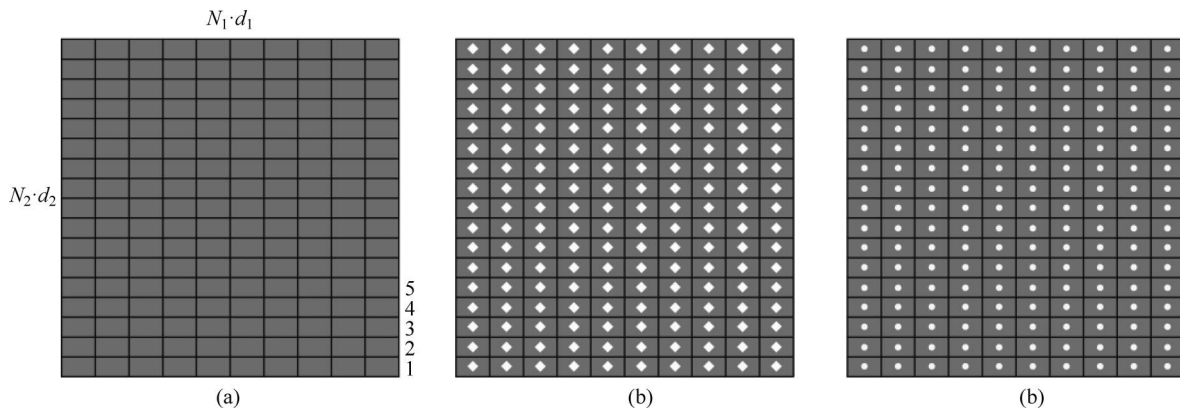


图10 二维周期结构

(a) 正交网格; (b) 菱形网格; (c) 点

沿 x 方向的周期结构衍射场 $\mathcal{F}$ 的结构因子为

$$\tilde{S}_x(\theta_1) = e^{i(N_1-1)\beta_1} \cdot \left(\frac{\sin N_1 \beta_1}{\sin \beta_1} \right), \quad \beta_1 = \frac{\pi d_1 \sin \theta_1}{\lambda}$$

沿 y 方向的周期结构衍射场 F 的结构因子为

$$\tilde{S}_y(\theta_2) = e^{i(N_2-1)\beta_2} \cdot \left(\frac{\sin N_2 \beta_2}{\sin \beta_2} \right), \quad \beta_2 = \frac{\pi d_2 \sin \theta_2}{\lambda}$$

因此,二维周期结构的夫琅禾费衍射场结构因子为

$$\begin{aligned} & \tilde{S}(\theta_1, \theta_2) \\ &= \tilde{S}_x(\theta_1) \cdot \tilde{S}_y(\theta_2) \\ &= \left(\frac{\sin N_1 \beta_1}{\sin \beta_1} \right) e^{i(N_1-1)\beta_1} \cdot \left(\frac{\sin N_2 \beta_2}{\sin \beta_2} \right) e^{i(N_2-1)\beta_2} \end{aligned}$$

则二维周期结构的夫琅禾费衍射场 $\mathcal{F}$ 为

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\theta_1, \theta_2) &= \tilde{u}_0(\theta_1, \theta_2) \cdot \tilde{S}(\theta_1, \theta_2) \\ &= \tilde{u}_0(\theta_1, \theta_2) \cdot \left(\frac{\sin N_1 \beta_1}{\sin \beta_1} \right) e^{i(N_1-1)\beta_1} \cdot \\ & \quad \left(\frac{\sin N_2 \beta_2}{\sin \beta_2} \right) e^{i(N_2-1)\beta_2} \end{aligned}$$

相应的夫琅禾费衍射场场强分布为

$$I(\theta_1, \theta_2) = |\tilde{u}_0(\theta_1, \theta_2)|^2 \cdot \left(\frac{\sin N_1 \beta_1}{\sin \beta_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N_2 \beta_2}{\sin \beta_2} \right)^2 \quad (8)$$

1) 二维周期结构-圆孔方阵的衍射(A1~A3 结构)

二维周期屏的单元为半径为 R 的圆孔或圆点,的衍射场为

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\theta_1, \theta_2) &= \tilde{u}_0(\theta_1, \theta_2) \cdot \tilde{S}(\theta_1, \theta_2) \\ &= c_1 \left(\frac{2J_1(\alpha_1)}{\alpha_1} \right) \cdot \left(\frac{\sin N_1 \beta_1}{\sin \beta_1} \right) e^{i(N_1-1)\beta_1} \cdot \\ & \quad \left(\frac{\sin N_2 \beta_2}{\sin \beta_2} \right) e^{i(N_2-1)\beta_2} \end{aligned}$$

衍射强度单元因子近似为一常数。

衍射场强度分布为

$$\begin{aligned} I(\theta_1, \theta_2) &= i_0 \left(\frac{2J_1(\alpha_1)}{\alpha_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N_1 \beta_1}{\sin \beta_1} \right)^2 \cdot \\ & \quad \left(\frac{\sin N_2 \beta_2}{\sin \beta_2} \right)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi R \sin \theta_1}{\lambda} \beta_1 = \frac{\pi d_1 \sin \theta_1}{\lambda} \beta_2 = \frac{\pi d_2 \sin \theta_2}{\lambda}$$

2) 二维周期结构-长方孔方阵的衍射(B1 结构)

二维周期屏的单元为长方形孔($a \times b$)的衍射

场为

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\theta_1, \theta_2) &= \tilde{u}_0(\theta_1, \theta_2) \cdot \tilde{S}(\theta_1, \theta_2) \\ &= c_2 \left(\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} \right) \left(\frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} \right) \cdot \left(\frac{\sin N_1 \beta_1}{\sin \beta_1} \right) e^{i(N_1-1)\beta_1} \cdot \\ & \quad \left(\frac{\sin N_2 \beta_2}{\sin \beta_2} \right) e^{i(N_2-1)\beta_2} \end{aligned}$$

强度单元因子为

$$|\tilde{u}_0(\theta_1, \theta_2)|^2 = i_0 \left(\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} \right)^2$$

衍射场强度分布为

$$\begin{aligned} I(\theta_1, \theta_2) &= i_0 \left(\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N_1 \beta_1}{\sin \beta_1} \right)^2 \cdot \\ & \quad \left(\frac{\sin N_2 \beta_2}{\sin \beta_2} \right)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi a \sin \theta_1}{\lambda} \alpha_2 = \frac{\pi b \sin \theta_2}{\lambda} \beta_1 = \frac{\pi d_1 \sin \theta_1}{\lambda} \beta_2 = \frac{\pi d_2 \sin \theta_2}{\lambda}$$

3) 二维周期结构-正方孔方阵的衍射(B2 结构)

二维周期屏的单元为正方形(边长为 a)的衍射场为

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\theta_1, \theta_2) &= \tilde{u}_0(\theta_1, \theta_2) \cdot \tilde{S}(\theta_1, \theta_2) \\ &= c_3 \left(\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} \right) \left(\frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} \right) \cdot \left(\frac{\sin N_1 \beta_1}{\sin \beta_1} \right) e^{i(N_1-1)\beta_1} \cdot \\ & \quad \left(\frac{\sin N_2 \beta_2}{\sin \beta_2} \right) e^{i(N_2-1)\beta_2} \end{aligned}$$

衍射场强度分布为

$$\begin{aligned} I(\theta_1, \theta_2) &= i_0 \left(\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} \right)^2 \cdot \\ & \quad \left(\frac{\sin N_1 \beta_1}{\sin \beta_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N_2 \beta_2}{\sin \beta_2} \right)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi a \sin \theta_1}{\lambda} \alpha_2 = \frac{\pi a \sin \theta_2}{\lambda} \beta_1 = \frac{\pi d_1 \sin \theta_1}{\lambda} \beta_2 = \frac{\pi d_2 \sin \theta_2}{\lambda}$$

4) 二维周期结构-等腰直角三角孔方阵的衍射(B3 结构)

二维周期屏的单元为等腰直角三角形(直角边长为 a)的衍射场为^[8]

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\theta_1, \theta_2) &= \tilde{u}_0(\theta_1, \theta_2) \cdot \tilde{S}(\theta_1, \theta_2) \\ &= c_4 \left[\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) e^{-i(\alpha_1 + \alpha_2)} \text{sinc}(\alpha_1 - \alpha_2) - \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{\alpha_1} e^{-i\alpha_2} \text{sinc}(\alpha_2) - \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{\alpha_2} e^{-i\alpha_1} \text{sinc}(\alpha_1) \right] e^{i \left(k f + \frac{f}{k} \left[\left(\frac{\alpha_1}{a} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_2}{b} \right)^2 \right] \right)} \cdot \\ & \quad \left(\frac{\sin N_1 \beta_1}{\sin \beta_1} \right) e^{i(N_1-1)\beta_1} \left(\frac{\sin N_2 \beta_2}{\sin \beta_2} \right) e^{i(N_2-1)\beta_2} \end{aligned}$$

其中

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \alpha_1 = \frac{\pi a \sin \theta_1}{\lambda} \alpha_2 = \frac{\pi a \sin \theta_2}{\lambda}$$

$$\beta_1 = -\frac{\pi d_1 \sin \theta_1}{\lambda} \beta_2 = -\frac{\pi d_2 \sin \theta_2}{\lambda}$$

衍射场强度分布为

$$I(\theta_1, \theta_2)$$

$$= i_0 \left[\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) e^{-i(\alpha_1 + \alpha_2)} \text{sinc}(\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{1}{\alpha_1} e^{-i\alpha_2} \text{sinc}(\alpha_2) - \frac{1}{\alpha_2} e^{-i\alpha_1} \text{sinc}(\alpha_1) \right]^2 \cdot$$

$$\left(\frac{\sin N_1 \beta_1}{\sin \beta_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N_2 \beta_2}{\sin \beta_2} \right)^2 \quad (12)$$

3.2.3 二维六孔结构(苯环结构)衍射

1) 六方排列圆孔结构的衍射

6个孔呈正六边形排列(半径 D_1 , 孔径 R_1), 设中心到顶点的距离为 D_1 , 单孔半径为 R_1 , 位置坐标为

$$r_k = D_1 \left(\cos \frac{k\pi}{3}, \sin \frac{k\pi}{3} \right) \quad k = 0, 1, 2 \cdots 5$$

夫琅禾费衍射强度分布为

$$I(q) \propto \left| \frac{2J_1(qR_1)}{qR_1} \cdot \sum_{k=0}^5 e^{iq \cdot r_k} \right|^2 \quad (13)$$

其中, $q = |q| = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$ 。

2) 六方排列圆孔+中心大圆孔结构的衍射(C1结构)

外围6孔: 6个孔呈正六边形排列(半径 D_1 , 孔径 R_1), 中心到顶点的距离为 D_1 , 单孔半径为 R_1 。位置坐标为

$$r_k = D_1 \left(\cos \frac{k\pi}{3}, \sin \frac{k\pi}{3} \right) \quad k = 0, 1, 2 \cdots 5$$

中心大孔: 位于六边形的中心, 孔径 $R_c (R_c \geq R_1)$

夫琅禾费衍射强度分布为

$$I(q) \propto \left| \frac{2J_1(qR_1)}{qR_1} \cdot \sum_{k=0}^5 e^{iq \cdot r_k} + \frac{2J_1(qR_c)}{qR_c} \right|^2 \quad (14)$$

其中, $q = |q| = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$ 。

3) 六方排列圆孔+外围两圆孔(单侧非对称分布)结构的衍射(C2结构)

中心6孔: 6个孔呈正六边形排列(半径 D_1 , 孔径 R_1), 设中心到顶点的距离为 D_1 , 单孔半径

为 R_1 。位置坐标为

$$r_k = D_1 \left(\cos \frac{k\pi}{3}, \sin \frac{k\pi}{3} \right) \quad k = 0, 1, 2 \cdots 5$$

外围2孔: 单侧非对称分布(半径 D_2 , 孔径 R_2), 设中心到顶点的距离为 D_2 , 单孔半径为 R_2 。

位置坐标为

$$r_1 = (D_2, 0), \quad r_2 = (D_2 \cos \theta, D_2 \sin \theta)$$

夫琅禾费衍射强度分布为

$$I(q) \propto \left| \frac{2J_1(qR_1)}{qR_1} \cdot \sum_{k=0}^5 e^{iq \cdot r_k} + \frac{2J_1(qR_2)}{qR_2} \cdot (e^{iq \cdot r_1} + e^{iq \cdot r_2}) \right|^2 \quad (15)$$

其中, $q = |q| = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$ 。

4) 六方排列圆孔+外围三圆孔结构的衍射(C3结构)

中心6孔: 6个孔呈正六边形排列(半径 D_1 , 孔径 R_1), 设中心到顶点的距离为 D_1 , 单孔半径为 R_1 。

外围3孔: 120° 对称分布(半径 D_2 , 孔径 R_2), 设中心到顶点的距离为 D_2 , 单孔半径为 R_2 。

其位置坐标为

$$\begin{cases} r_k^{(1)} = D_1 \left(\cos \frac{k\pi}{3}, \sin \frac{k\pi}{3} \right) & k = 0, 1, 2 \cdots 5 \\ r_m^{(2)} = D_2 \left(\cos \frac{2m\pi}{3}, \sin \frac{2m\pi}{3} \right) & m = 0, 1, 2 \end{cases}$$

夫琅禾费衍射强度分布为

$$I(q) \propto \left| \frac{2J_1(qR_1)}{qR_1} \cdot \sum_{k=0}^5 e^{iq \cdot r_k^{(1)}} + \frac{2J_1(qR_2)}{qR_2} \cdot \sum_{m=0}^2 e^{iq \cdot r_m^{(2)}} \right|^2 \quad (16)$$

其中, $q = |q| = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$ 。

3.2.4 二维无序分布结构的夫琅禾费衍射

与周期结构相对立的是无序结构, 二维无序结构(位置无序但形状相同的结构), 无序结构与周期结构相比较, 两者差别在结构因子上, 对于周期结构, 结构因子式中求和各项恰巧形成一等比级数, 而对于无规结构, 由于各单元中心位置 r_n 的随机性, 结构因子式中求和各项中的相移量是随机变化的, 这表现在矢量图解上就是一副无规行走的图像。

1) 二维无序分布圆孔的衍射(D1结构)

N 个随机圆孔夫琅禾费衍射光强分布为

$$I(q) \propto \left| \frac{2J_1(qR)}{qR} \cdot \sum_{n=1}^N e^{iq \cdot r_n} \right|^2 \quad (17)$$

其中, $\left| \frac{2J_1(qR)}{qR} \right|^2$ 为单孔衍射项, r_n 为第 n 个圆孔的中心坐标, R 为单孔半径。

2) 二维无序分布正方孔的衍射(D2 结构)

N 个随机分布的正方孔夫琅禾费强度分布为

$$I(q) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{q_x a}{2}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{q_y a}{2}\right) \cdot \left| \sum_{n=1}^N e^{iq \cdot r_n} \right|^2 \quad (18)$$

其中, a 为方孔边长, r_n 为第 n 个方孔的中心坐标, (q_x, q_y) 为倒空间坐标。

3) 二维无序分布十字孔的衍射(D3 结构)

十字孔透射函数可分解为两个正交矩形(或两个垂直狭缝)函数的叠加。单个十字孔衍射场为

$$E_{\text{cross}}(q) = Lw \cdot \text{sinc}\left(\frac{q_x w}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{q_y L}{2}\right) + \text{sinc}\left(\frac{q_x L}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{q_y w}{2}\right)$$

其中, L 为十字臂长, w 为臂宽(通常 $w \ll L$)。

对于 N 个随机分布十字孔的总强度为

$$I(q) \propto |E_{\text{cross}}(q)|^2 \cdot \left| \sum_{n=1}^N e^{iq \cdot r_n} \right|^2 \quad (19)$$

其中, r_n 为第 n 个十字孔的中心坐标, (q_x, q_y) 倒空间坐标。

3.3 实验与软件模拟二维结构衍射及衍射特点对比分析

衍射图样光强分布方向和周期性由单元因子决定,而衍射图光强最大值由该方向的结构因子决定。总衍射图案是结构内不同单元集体的衍射结果。下面总结不同结构的衍射特点。

3.3.1 大小不同的圆孔方阵的衍射

大小不同的圆孔方阵 A1、A2、A3 结构的实验与软件模拟衍射图见图 11 所示。首先单个圆孔衍射分布为以中央主极大为中心的同心圆环,随着圆孔直径增大,衍射场条纹形状不发生变化,但是条纹半径减小,衍射条纹的数量增加,条纹更密集。

二维周期性圆孔衍射的包络由单孔衍射决定,衍射图样为同心圆环,中央主极大即中心亮斑(艾里斑),外围环绕同心圆环,周期性圆孔引入使得主极大中包含很多个次极大,各次极大的包络

面与单个小孔夫琅禾费衍射场光强分布相同(将单个圆孔衍射光强分布中的光强极大称为主极大,将圆孔方阵衍射形成的比较密集的光强极大称为光强次极大)。因此,相同圆孔方阵的夫琅禾费衍射图样可以看成是由单个圆孔衍射图样与多个点光源(圆孔中心点)方阵产生的多光束干涉图样的乘积,这正是列阵定理所描述的结果。

同时,相邻次极大的间距与实际圆孔的间距成反比。

对于大小相同、数目不同的圆孔方阵,衍射光强分布图样基本相同,但随着圆孔数目的增多,光强分布的次极大较尖细,由于干涉而形成的次极大变得尖锐,光强的反差变大。

当大小、数目相同的圆孔方阵,随着圆孔间距的增大,其夫琅禾费衍射光强的次极大间隔变小,一个主极大所包含的次极大数目变多。

由图 11 可以看出,实验结果和模拟结果吻合,说明样品制作和测量精度高。

3.3.2 不同形状孔方阵的衍射

长方形方阵、正方孔方阵、直角三角孔方阵 B1、B2、B3 结构的实验与软件模拟衍射图见图 12 所示。首先单长方形孔的夫琅禾费衍射亮斑集中分布在 x 方向和 y 方向两个方向,中央亮斑为矩形,光强分布方向分别与对应的四条边垂直,形成四条光芒线,呈“+”字形明暗相间的图案,随着衍射角的增大,光强单调递减变化。因 $a(x \text{ 方向}) > b(y \text{ 方向})$,所以 y 方向比 x 方向衍射更加明显,衍射扩展与长方形孔的宽度成反比,衍射图样明显向 y 方向扩展,使得沿 x 方向衍射条纹的数目明显少于 y 方向,随着 a 的变大, y 方向的衍射变得越来越明显,当 a 远大于 b 时,此时矩形孔的衍射可以看作单缝衍射。

当 $a = b$,即为正方形孔, x 方向衍射和 y 方向衍射一样,衍射图案光强分布呈中心对称分布,正方形孔的衍射是长方形孔的衍射特例。

三角形孔夫琅禾费衍射光强分布方向分别与对应三条边垂直,衍射亮斑集中分布在三个方向上,形成六条光芒线。各种形状三角形孔的衍射光强变化特征基本相同,观察平面中心有中央主极大区域,随着衍射角的增大,光强都是单调递减变化。

从图 12 可以看出,二维周期性长方形孔、正方孔的衍射包络由单孔衍射决定,夫琅禾费整体分布均以中央主极大为中心的四条光芒线;二维周

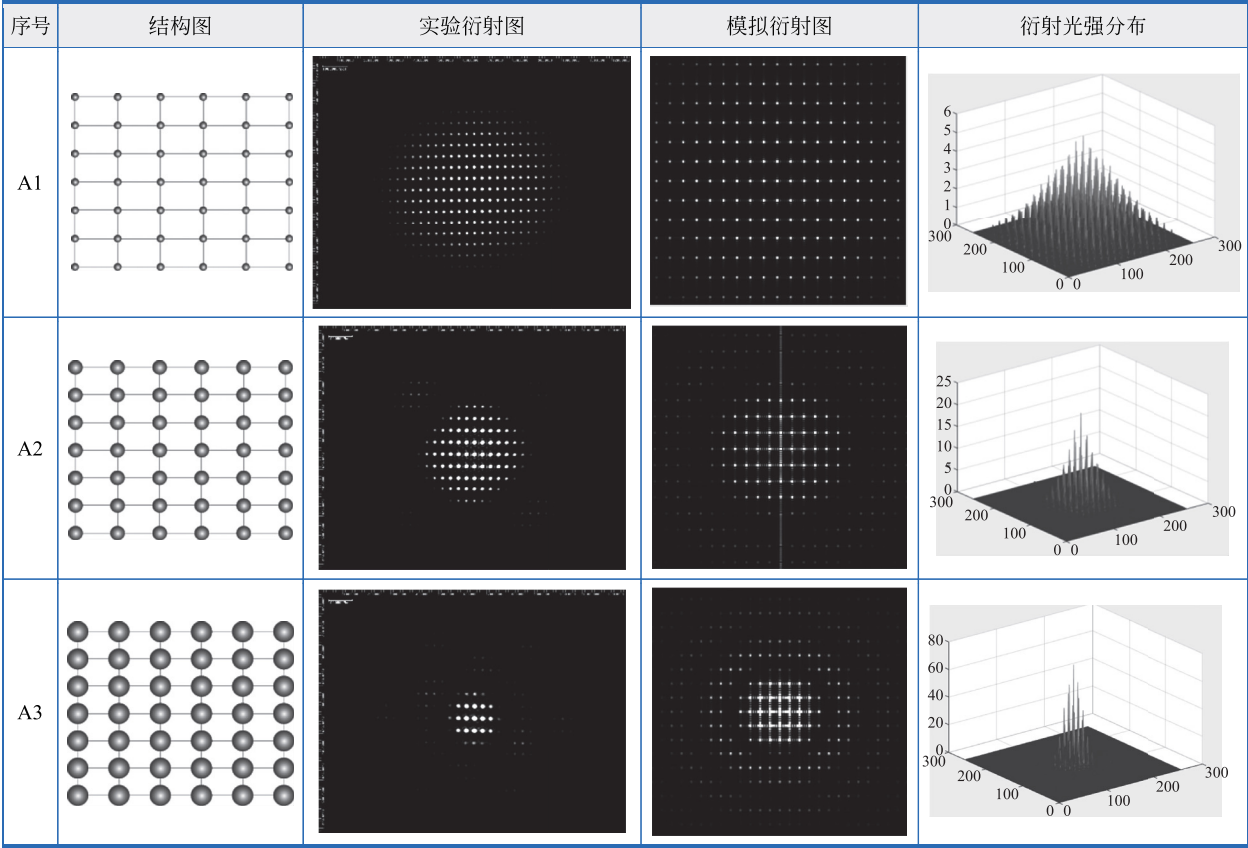


图 11 大小不同的圆孔方阵 A1、A2、A3 实验与软件模拟的衍射图

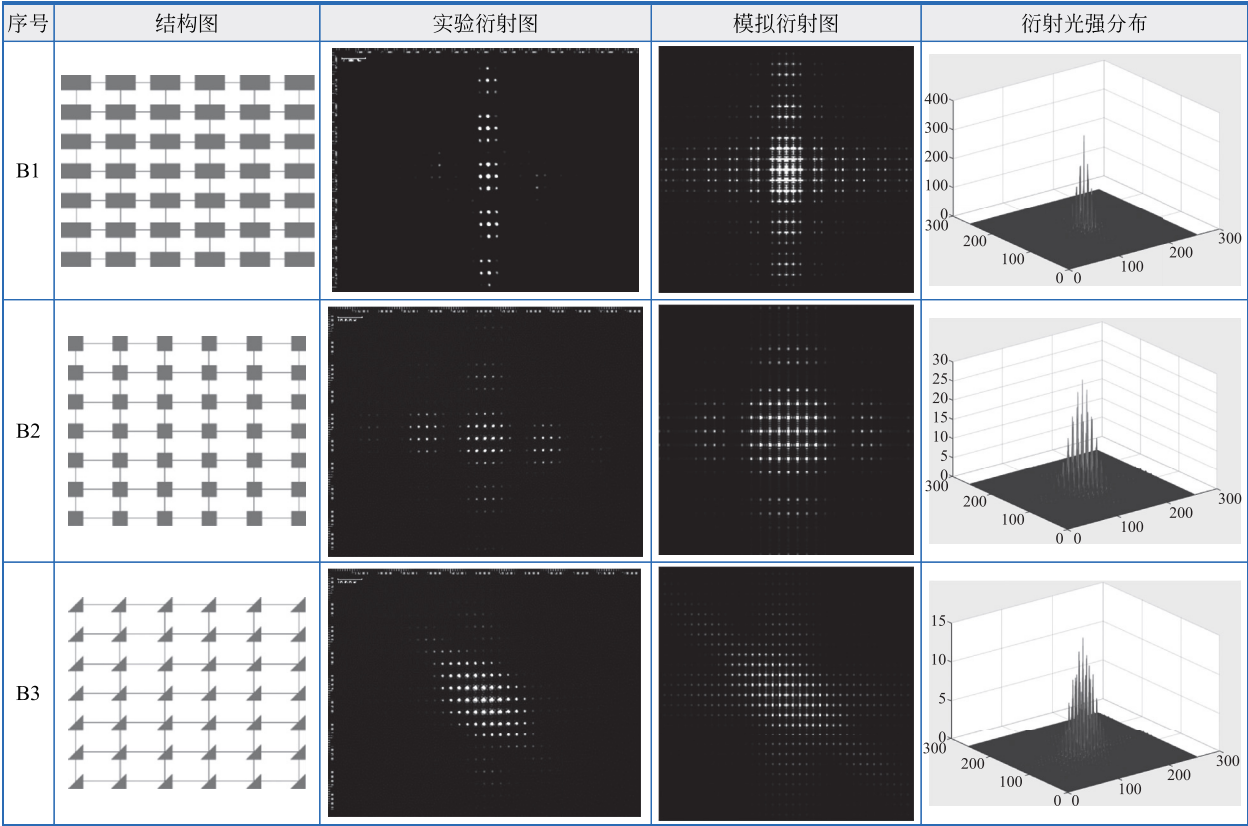


图 12 不同形状孔方阵 B1、B2、B3 实验与软件模拟的衍射图

期性三角孔的夫琅禾费衍射光强整体分布均是以中央主极大为中心且与对应三条边垂直的六条光芒线。光强分布的主极大中包含很多个次极大,各次极大的包络面与单个小孔夫琅禾费衍射场光强分布相同(将单个孔衍射光强分布中的光强极大称为主极大,将孔方阵衍射形成的比较密集的光强极大称为光强次极大)。因此,不同孔方阵的夫琅禾费衍射图样,可以看成是由单个孔衍射图样与多个点光源(孔中心点处作为点光源的位置)方阵产生的多光束干涉图样的乘积,这正是列阵定理所描述的结果^[9]。

同时,相邻次极大的间距与实际孔的间距成反比。

对于大小相同、数目不同的孔方阵,衍射光强分布图样基本相同,但随着孔数目的增多,光强分布的次极大较尖细,由于干涉而形成的次极大变得尖锐,光强的反差变大。

当大小、数目相同的孔方阵,随着孔间距的增大,其夫琅禾费衍射光强的次极大间隔变小,一个主极大所包含的次极大数目变多。

由图 12 可以看出,实验结果和模拟结果吻

合,说明样品制作和测量精度高。

3.3.3 二维六孔结构(苯环结构)的衍射

二维六孔结构(苯环结构)C1、C2、C3 的实验与软件模拟衍射图如图 13 所示,3 种结构的核心为六方排列圆孔结构,6 孔衍射图样呈完美的六角星状斑点分布,中心为明显亮斑,六重旋转对称性。而 C1、C2、C3 可以看作是几种基于苯的理想化学分子的表示。

C1 结构夫琅禾费衍射:中央大孔主导强化中心斑,周边 6 孔干涉调制六角对称斑点。C2 结构夫琅禾费衍射:单侧附加 2 孔导致六角斑强度弱化,且第 1 级斑出现非对称六角斑。C3 结构夫琅禾费衍射:整体六重对称衍射斑,3 孔使 6 孔的第 2、4、6 级斑强度下降,6 孔导致 3 孔斑呈现六角星状调制。

由图 13 可以看出,实验结果和模拟结果吻合,说明样品制作和测量精度高。

3.3.4 二维无序分布结构的衍射

二维随机孔的衍射结合了单元的独特衍射与无序排列引发的随机干涉效应。总光强由单元因子(单个孔的衍射)和结构因子(随机位置的相位

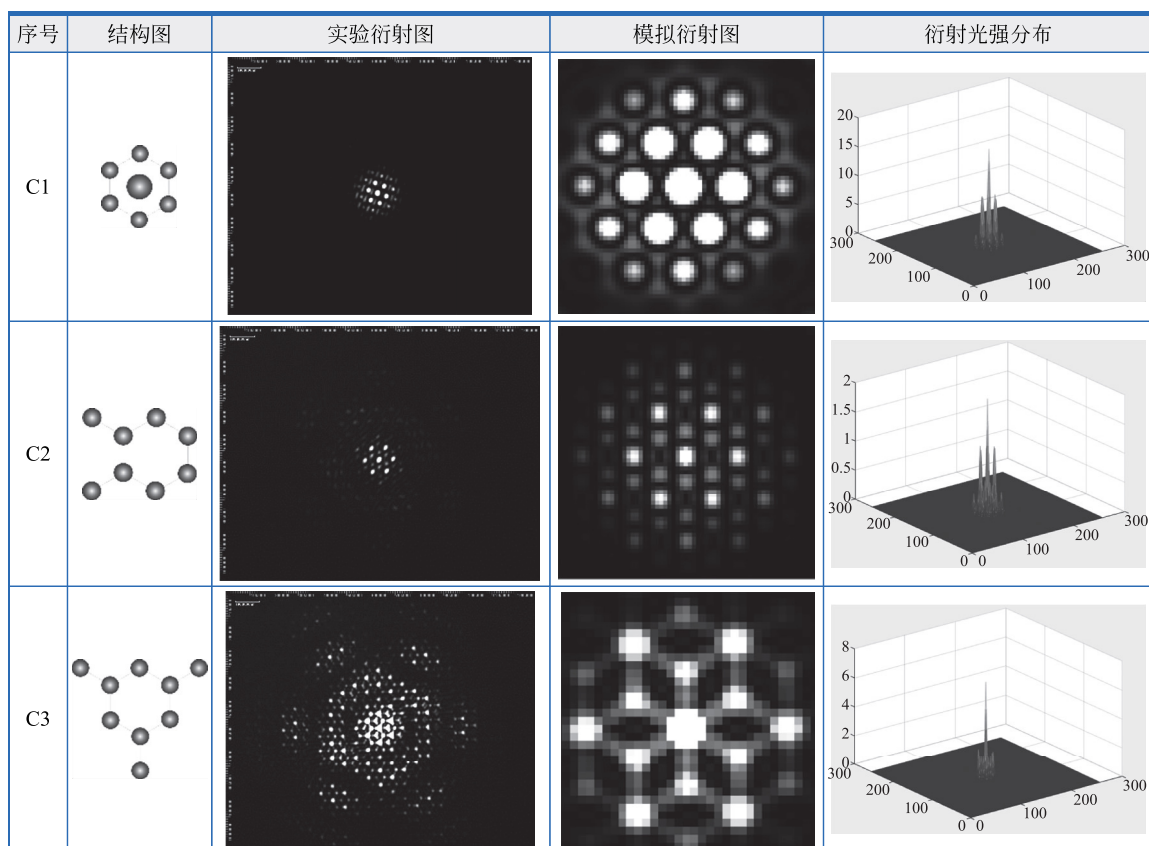


图 13 二维六孔结构(苯环结构)C1、C2、C3 实验与软件模拟的衍射图

叠加)共同决定。单元因子是单个结构单元的衍射特征,决定衍射的包络,若单元为圆形、正方形或特性形状,其傅里叶变换如艾里斑或 sinc 函数。结构因子为无序排列引入随机相位叠加,导致光强在空间上剧烈涨落。

二维六孔结构(苯环结构)D1、D2、D3 的实验与软件模拟衍射图见图 14 所示。

D1 为二维无序圆孔:包络为贝塞尔函数平方 $\left(\frac{2J_1(qR)}{qR}\right)^2$, 决定整体包络形态。衍射图样为同心圆环,中心亮斑(艾里斑),外围环绕同心圆环,圆孔的无序排列引入随机相位差,随机相位求和 $\sum_{n=1}^N e^{iq \cdot r_n}$ 导致高对比度散斑形成。

D2 为二维无序正方孔:包络为 $\text{sinc}^2\left(\frac{q_x a}{2}\right) \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{q_y a}{2}\right)$, 决定整体包络形态。衍射图样为十字形,正方孔的无序排列引入随机相位差,随机相位求和 $\sum_{n=1}^N e^{iq \cdot r_n}$ 导致十字主瓣上叠加细密散斑。

D3 为二维无序十字孔:包络为 $Lw \cdot \text{sinc}\left(\frac{q_x w}{2}\right) \cdot$

$\text{sinc}\left(\frac{q_y L}{2}\right) + \text{sinc}\left(\frac{q_x L}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{q_y w}{2}\right)$, 决定整体包络形态,包络内出现随机散斑。单元因子的中央亮斑呈十字形,方向与十字孔垂直(即水平狭缝产生垂直衍射条纹,垂直狭缝产生水平衍射条纹),水平方向主瓣宽度由垂直狭缝宽度决定,垂直方向狭缝宽度由水平方向狭缝宽度决定。沿十字方向(水平和垂直)会出现次级亮纹,强度按 sinc^2 函数衰减,由于两个狭缝的衍射叠加,在斜向(45°)可能观察到微弱的干涉条纹,这取决十字孔的具体尺寸。若单个十字孔完全对称,衍射图样呈四重对称性(水平和垂直对称),若十字孔不对称,则衍射条纹在较窄的狭缝方向扩展更宽,则呈二重对称。十字孔的无序排列引入随机相位差,随机相位求和 $\sum_{n=1}^N e^{iq \cdot r_n}$ 导致高对比度散斑形成。

由图 14 可以看出,实验结果和模拟结果吻合,说明样品制作和测量精度高。

3.3.5 二维结构参数测量及误差分析

接下来根据实验衍射图,计算圆孔方阵的孔间距,并与理论值进行比较,分析误差来源及提高测量精度的方案。

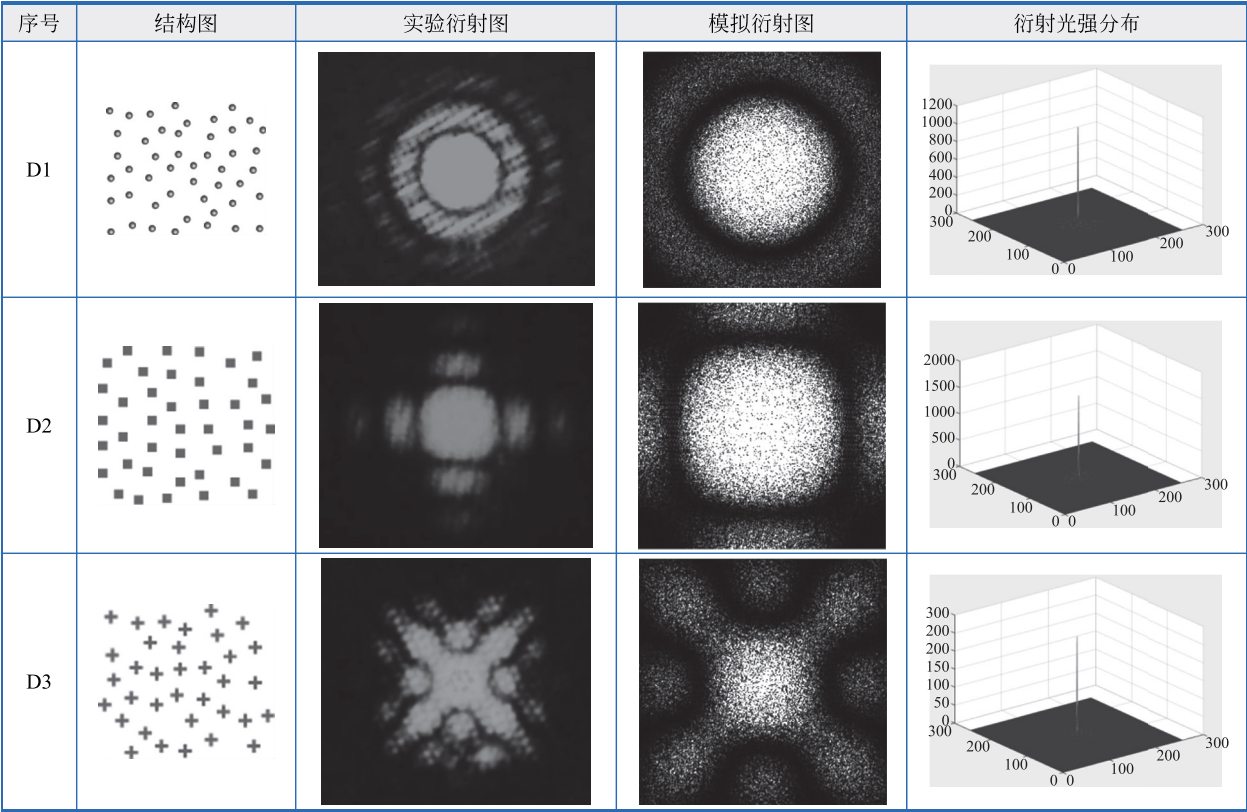


图 14 二维无序结构 D1、D2、D3 实验与软件模拟的衍射图

1) 二维周期结构孔间距测量原理

二维周期结构的衍射斑点对应其倒易点阵,可用晶体衍射来分析结构。在倒易点阵中,倒易矢量的大小与原始向量大小成反比。

以圆孔方阵 A1 为例,计算其孔间距。A1 结构见图 15(a),其倒易点阵见图 15(b)。

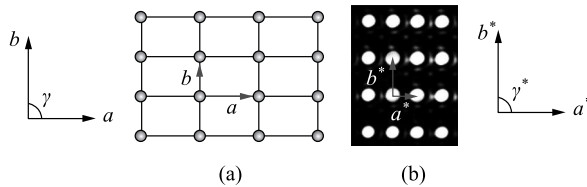


图 15 圆孔方阵与其倒易点阵

(a) 圆孔方阵; (b) 圆孔方阵的倒易点阵

图 15 中,圆孔方阵的孔间距 a 、 b 与其倒易点阵向量 a^* 、 b^* 的大小之间的关系为^[10]:

根据式(20)计算圆孔方阵的孔间距

$$b = \frac{k}{b^*}, \quad a = \frac{k}{a^*} \quad (20)$$

其中, k 为比例因子,由激光波长为 λ 、数字相机的放大倍数 n 等实验参数决定,本实验光学系统的 $k = 20.8 \times 10^6 \text{ nm}^2$ 。

2) 测量 A1 结构倒易点阵向量 a^* 、 b^* 的大小

在 MindVisio 相机测量软件中,测量 A1 结构倒易点阵中相邻亮斑中心的水平和竖直距离,即为 a^* 、 b^* 的大小,水平和竖直距离分别测量 6 次,见图 16 所示。

3) A1 结构孔间距的数据处理及误差计算

为了评估本实验方法的准确性和可靠性,我们将实验测量值与理论值进行了对比。A1 结构的水平孔间距 a 和竖直孔间距 b 的数据处理及误差计算见表 1 和表 2。

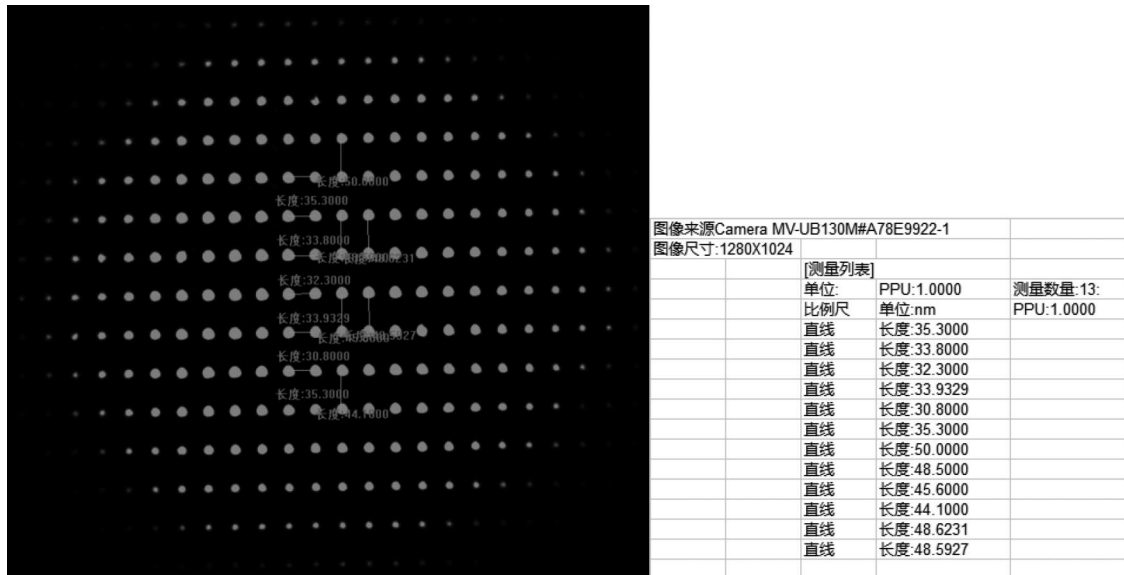


图 16 A1 结构倒易点阵向量 a^* 、 b^* 大小的测量

表 1 A1 结构水平孔间距 a 的数据处理及误差计算

参数	a^*/nm	$a = \frac{k}{a^*}/\text{mm}$	$\bar{a}/\text{mm}$	$a_{\text{理论值}}/\text{mm}$	$u_A(a)/\text{mm}$	$\frac{ a - \bar{a} }{\bar{a}} \times 100\%$
测量次数						
1	35.3000	0.589				
2	33.8000	0.615				
3	32.3000	0.644				
4	33.9329	0.613	0.621	0.60	0.032	4%
5	30.8000	0.675				
6	35.3000	0.589				

表 2 A1 结构竖直孔间距 b 的数据处理及误差计算

参数 测量次数	b^*/nm	$b=\frac{k}{b^*}/\text{mm}$	$\bar{b}/\text{mm}$	b 理论值/ mm	$u_A(b)/\text{mm}$	Ea $\frac{ a-\bar{a} }{\bar{a}}\times 100\%$
1	50.0000	0.416				
2	48.5000	0.429				
3	45.6000	0.456				
4	44.1000	0.472	0.438	0.40	0.08	9%
5	48.6231	0.424				
6	48.5927	0.428				

由表 1、表 2 的结果可以看出,实验值与理论值符合的比较好,表明该实验具有较高的精度,但还存在一定的误差,接下来分析误差来源及提高精度的方案。

4) 误差来源及提高测量精度的方案
误差来源及提高精度的方案如下。

采用精度 0.01mm 的精密激光打孔机制作二维结构,制作引入误差,可采用精度更高的打孔机制作结构。

在测量倒易点阵相邻两光斑距离时,起始点和终止点都要选择光斑的中心位置,两光斑距离的测量存在误差。可以通过多次测量求取平均值来减小测量误差。

在实验过程中利用光衰减器,应尽量减小入射激光的强度,消除干扰。调节光阑的大小,使得激光光斑尺寸尽可能小,并照射到二维结构合适的区域,提高成像效果。最终获得清晰、分立的倒易点阵图像,以进行测量。本实验使用的激光器为波长为 532nm 的绿光,根据衍射公式: $rd=L\lambda$,可通过采用波长为 650nm 的红光激光器和减小孔径,均有助于提高实验精度。

4 结语

本文提供的多元二维结构的制作方法及其进行衍射测量与验证的系统,可在普通环境下进行精密的衍射测量与验证,构思巧妙、研究方法简便、测量精度高、实验安全且拓展性强,可为研究各种微结构、晶体结构及非晶体结构提供低成本、低实验环境要求的研究方法,该实验方法有助于启发学生思维,在培养学生创新思维 and 创新能力方面,有着重要的作用,值得推广。

参 考 文 献

[1] 钟锡华. 现代光学基础[M]. 2 版. 北京:北京大学出版社, 2012:231.

[2] 周公度. 郭可信. 晶体和准晶体的衍射[M]. 北京:北京大学出版社,1999.

[3] HARBURN G, TAYLOR, Charles Alfred, WELBERRY T R. Atlas of optical transforms[M]. Cornell University Press, 1975.

[4] 于凤军. 二维光栅衍射图样的特性分析[J]. 大学物理, 2016, 35(8):32-35.

YU F J. Characteristic analysis of two-dimensional grating diffraction patterns[J]. College Physics, 2016, 35(8): 32-35. (in Chinese)

[5] 欧攀,何汉相等. Matlab 光学仿真[M]. 3 版. 北京:北京航空航天大学出版社,2019.

[6] 伽塔克(CHATAK A K),谢伽拉扬(THYOGARAJAN K). 近代光学[M]. 北京:高等教育出版社,1987.

[7] 张永梅. 多圆孔夫琅和费衍射的研究及衍射图样的可视化[J]. 大学物理实验, 2017, 30(5):63-66.

ZHANG Y M. Research on Fraunhofer diffraction with multiple circular holes and visualization of diffraction patterns[J]. Physical Experiment of College, 2017, 30(5): 63-66. (in Chinese)

[8] 王红梅. 等腰三角形孔的夫琅和费衍射研究[J]. 榆林学院学报, 2008, 18(4):43-44.

WANG H M. Fraunhofer diffraction study of isosceles triangular holes[J]. Journal of Yulin College, 2008, 18(4): 43-44. (in Chinese)

[9] 梁华秋,冯尚申,张永炬,等. 正方形小孔阵夫琅和费衍射光强分布[J]. 台州学院学报, 2007, 29(3):37-39, 43.

LIANG H Q, FENG S S, ZHANG Y J, et al. Square pinhole array Fraunhofer diffraction intensity distribution[J]. Journal of Taizhou University, 2007, 29(3): 37-39, 43. (in Chinese)

[10] Tsutaoka, Takanori, Tokunaga, et al. Observation of the two-dimensional reciprocal lattice by use of lattice grating sheets and a laser pointer[J]. European Journal of Physics, 2014, 35(5): 1-11. (in Chinese)