

RLC 电路的宇称-时间-对称物理模拟实验教学探索

李 涛 陈忠善 邱康燕 周成坤 许哲康 薛玉琪 李佳明

(中山大学物理与天文学院, 广东 珠海 519082)

摘 要 满足宇称-时间(Parity-Time, PT)-对称的哈密顿量在其 PT -对称区间也可以具有全实数的本征值, 是非厄米量子力学中的一种特殊情况, 已被广泛用于开放系统的物理研究。一对电磁耦合的并联电阻-电感-电容(RLC)谐振电路, 在加入等增益(耗散)强度的正负电阻对后, 可构建出这类 PT -对称的非厄米系统。本文介绍基于 RLC 谐振电路实现 PT -对称物理研究的教学设计及实践探索, 同时提供了更深入理解 PT -对称和 RLC 谐振结合后的多级相变特性的实验研究。

关键词 PT -对称; 稳态 PT -对称电路; 非厄米系统; RLC 谐振电路

EXPLORING EXPERIMENTAL TEACHING OF PARITY-TIME SYMMETRIC PHYSICS WITH RLC CIRCUITS

LI Tao CHEN Zhongshan QIU Kangyan ZHOU Chengkun XU Zhekang XUE Yuqi LI Jiaming

(School of Physics and Astronomy, Sun Yat-sen University, Zhuhai, Guangdong 519082)

Abstract A Hamiltonian with Parity-Time (PT) symmetry can have fully real eigenvalues within its PT -symmetric regime. This is a special case in non-Hermitian quantum mechanics and has been widely used in open-system physics research. A pair of electromagnetically coupled parallel RLC resonant circuits, when incorporating a pair of equal-magnitude positive and negative resistances with equivalent gain (dissipation) strength, can form a PT -symmetric non-Hermitian system. This paper presents a teaching-oriented design and practical exploration of PT -symmetric physics research based on RLC resonant circuits. It also offers experimental studies on multilevel phase transitions resulting from the combination of PT symmetry and RLC resonance, enhancing the understanding of their characteristics.

Key words PT -symmetry; stable PT -symmetry circuit; non-Hermitian systems; RLC circuit

传统量子力学中, 哈密顿量(H)是厄米的。这一特性不仅保证了能量本征值是全实数, 还确保了波函数的么正性。近年来, 非厄米量子力学在描述开放系统方面取得了显著进展。与此相反, 非厄米量子力学中的哈密顿量 H 不再满足厄

米性, 因此其波函数也不需要保证么正性。这个特性将在处理开放系统问题时展现出独特的优势。

PT -对称的非厄米哈密顿量 H 是非厄米量子力学中的一个特例。该概念最早由 Bender 和

收稿日期: 2024-11-01

基金项目: 国家自然科学基金(12174458)资助; 中山大学中央高校基本科研业务费(2021qntd28, 24xkjc015)资助。

通信作者: 李佳明, lijiam29@mail.sysu.edu.cn。

引文格式: 李涛, 陈忠善, 邱康燕, 等. RLC 电路的宇称-时间-对称物理模拟实验教学探索[J]. 物理与工程, 2025, 35(4): 158-168.

Cite this article: LI T, CHEN Z S, QIU K Y, et al. Exploring experimental teaching of parity-time symmetric physics with RLC circuits [J]. Physics and Engineering, 2025, 35(4): 158-168. (in Chinese)

Boettcher 在 1998 年提出^[1]。它在宇称反演算符($\hat{P}$)和时间反演算符($\hat{T}$)的联合作用下保持不变,即满足对易关系 $[H, \hat{P}\hat{T}] = 0$ 。这种 PT -对称的 H 处于其参数空间的 PT -对称相时,其本征能量依然可以为全实数。这表明,在 PT -对称相中,厄米性的公理可以扩展到具有 PT -对称性的系统。此外, PT -对称 H 还具有 PT -对称破缺相,并在此区间内出现非实数的本征值。这使得系统的演化出现增益和耗散,也特别适合开放系统的特性描述。

PT -对称系统具有保持物理可观测量为实数的特性,这使得探索非厄米量子力学的新领域成为可能。在过去二十多年中, PT -对称系统在数学^[2-4]、光学^[5-7]、量子力学^[8-10]、量子统计^[11-13]、拓扑物理^[14]、精密测量^[15-17]以及工程领域,特别是无线能量传输^[18]等多个领域受到了广泛关注和研究。例如,研究人员于 2009 年在光波导中首次研究了 PT -对称性破缺现象^[7]。该实验通过动态调节光学器件中的增益和损耗,实现了 PT -对称系统。此后,掀起了关于 PT -对称系统、研究的热潮,陆续地在电子电路^[19]、机械振动^[20]、超冷原子^[14]、囚禁离子^[21]、NV 色心^[22]、声学系统^[23]等多种物理体系中被验证和研究。

得益于经典系统在信噪比和可控性方面的优势, PT -对称量子物理的实验研究也可以依托经典系统展开。基于 RLC 电路的 PT -对称量子模拟方案在这两个方面尤为突出,它能够精确控制系统的增益和损耗,这一点在量子系统中较难实现。此外, RLC 电路系统易于制作和测量,且具有良好的可扩展性,使其在模拟复杂的非厄米物理方面更具优势。当然,与科研中常见的 PT -对称光学系统相比,基于 RLC 电路的系统处理的信号频率较低,系统延迟较长,高频响应较差,易受电路中各类寄生电容和寄生电感的干扰,且由于波长较长,较难引入量子效应。但值得注意的是这些缺点在教学研究领域影响不大,因此可以把经典的 RLC 电路广泛地应用于教学和研究中。

本文介绍一种构建具有 PT -对称性的 RLC 谐振电路的方法。通过将一个具有正电阻的耗散型 RLC 谐振电路与一个具有负电阻的增益型 RLC 谐振电路耦合,成功构建了 PT -对称电路^[24]。在实验中,我们固定了两个 RLC 谐振电路之间的电磁耦合强度(即两个电感之间的互感

强度),并通过改变正负电阻的大小,分别实现了 PT -对称相和 PT -对称破缺相。在 PT -对称相区间内,我们通过观测电路对的稳态和瞬态响应,测量了在不同增益和耗散强度下的谐振频率(这对应于 H 的本征值的实部);在 PT -对称破缺相区间内,我们通过拟合系统在激励下的瞬态振荡增益曲线,从而从谐振频率和增益系数中获得了系统的本征值的实部和虚部。经过多次测量,我们逼近了对称相和破缺相的相变点,这也常被称为奇异点(Exceptional Point, EP)。我们还根据实验原理和以往的教学效果,给出了实验教学的分层设计和结构设计。最后,学生通过本实验的学习,可以从电压的演化的不同直观地观测到系统 PT -对称性自发破缺的过程。这些知识和实验将帮助学生更好的理解 PT -对称性在开放系统的特性,也提供了一种实验探索开放量子力学研究前沿的途径。

1 实验原理

1.1 PT -对称特性简介

在厄米系统中, PT -对称特性比较常见。以一维谐振子 $H = \hat{p}^2 + \hat{x}^2$ 为例($m = \frac{1}{2}, \omega = 2, \hbar = 1$),这个哈密顿量满足厄米性 $H = H^\dagger$,并且它的本征值 $E_n = 2n + 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)全部是非负实数。在宇称变换下,么正算符 $\hat{P}$ 对坐标算符 $\hat{x}$ 以及动量算符 $\hat{p}$ 产生宇称反转的作用^[1]: $\hat{P}\hat{x}\hat{P} = -\hat{x}$, $\hat{P}\hat{p}\hat{P} = -\hat{p}$;反么正算符 $\hat{T}$ 具有时间反演的效果,会对 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 的虚部产生共轭作用^[1]: $\hat{T}\hat{x}\hat{T} = \hat{x}$, $\hat{T}\hat{p}\hat{T} = -\hat{p}$, $\hat{T}i\hat{T} = -i$ 。在 $\hat{P}$ 和 $\hat{T}$ 的共同作用下,谐振子的动能 $K(p) = \hat{p}^2$ 和势能 $V(x) = \hat{x}^2$ 均维持不变: $\hat{P}\hat{T}\hat{p}^2\hat{P}\hat{T} = (\hat{p})^2 = \hat{p}^2$, $\hat{P}\hat{T}\hat{x}^2\hat{P}\hat{T} = (-\hat{x})^2 = \hat{x}^2$,满足 PT -对称性。

在非厄米系统中,以包含增益和耗散的二能级系统为例,其 PT -对称的哈密顿量 H 可以表示为

$$H = \begin{pmatrix} -i\gamma & \kappa \\ \kappa & +i\gamma \end{pmatrix}$$

该哈密顿量 H 满足 $\hat{P}\hat{T}H\hat{P}\hat{T} = H$,其中 $\hat{P} = \sigma_x$ (泡利矩阵), $\hat{T} = *$ (共轭操作 $i = -i$), $-i\gamma$ 和 $+i\gamma$ 分别描述系统的增益和耗散, κ 为耦合率。这个哈密顿量 H 对应的本征值为 $\pm \sqrt{\kappa^2 - \gamma^2}$ 。

这两个本征值以及它们对应的本征态 $(a_1, a_2)^T$, 在 $\kappa = \gamma$ 处简并, 因此也称这点为 EP 点。在强耦合区域 ($\gamma < \kappa$), 本征值全为实数, 系统处于 PT -对称相; 在弱耦合区域 ($\gamma > \kappa$), 本征值为虚数, 系统处于 PT -对称破缺相。

PT -对称哈密顿量 H 的本征态 $|\psi\rangle$ 的时间演化可以通过解析含时薛定谔方程得到

$$i \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle$$

因此, 在数学形式上, 可以构造电路的基本一阶常微分方程, 使其与含时薛定谔方程等效。在这种对应中, 电路中的基本物理量——电压与电流——可构成态矢量, 其振幅等效于波函数的概率模, 而特征频率则对应于系统的能量本征值 (当 $\hbar = 1$ 时, 频率与能量具有相同的量纲)。

实验中, 两个 LC 电路对应于两个独立的谐振子系统, 有源器件和电阻可以分别提供精确可调的增益和耗散。此外, 通过电感线圈的互感, 实现了增益和耗散模式的耦合。因此, 在增益和耗散平衡的条件下, 一对互相耦合的 RLC 和 RLC 电路能够模拟 PT -对称非厄米系统的量子行为。通过动态调节系统的耦合强度和增益 (或耗散) 强度, 可以模拟 PT -对称系统在不同条件下的本征态波函数的特征模式和动力学演化。

1.2 PT -对称 RLC 谐振电路和模型

图 1(a) 展示了一种采用互感耦合的双端 RLC 谐振的 PT -对称电路。增益端电阻为 $-R$, 为耗散端电阻 R 的时间反演对应元件。对该电路进行宇称和时间反演操作后 (如图 1(b) 所示), 电路保持不变, 这表明该电路具有 PT -对称性。在这里, 宇称变换指的是空间拓扑结构的变换, 而时间反演指的是增益和耗散过程的互换。

对于图 1(a) 所示电路, 由基尔霍夫定律可得如下微分方程组^[24]

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= -\gamma\omega_0 V_1 + \frac{I_1^L}{C} \\ \frac{dV_2}{dt} &= \gamma\omega_0 V_2 + \frac{I_2^L}{C} \\ \frac{dI_1^L}{dt} &= \frac{-V_1 + \mu V_2}{L(1-\mu^2)} \\ \frac{dI_2^L}{dt} &= \frac{\mu V_1 - V_2}{L(1-\mu^2)} \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 是 LC 谐振器的本征振荡频率,

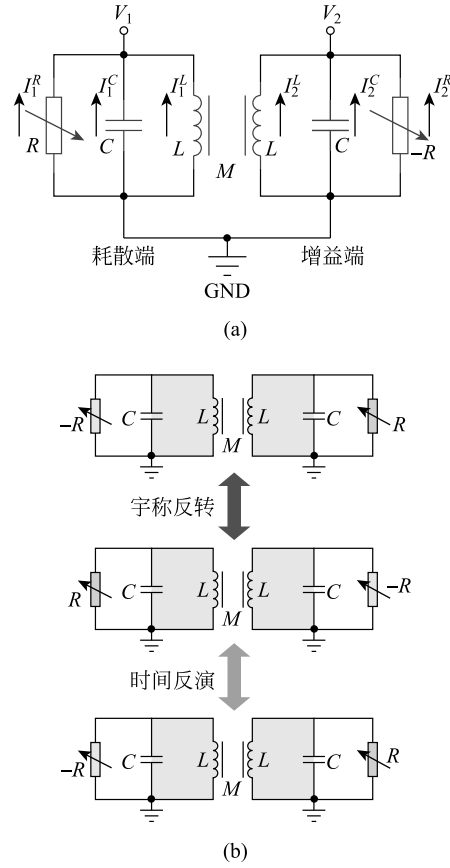


图 1 PT -对称电路原理图和示意图, (a) 中 V_n 为对地的电压, I_n^R, I_n^L, I_n^C 分别为电阻、电感以及电容的电流, $n = 1$ 或 2 分别代表了耗散端或增益端, M 表示两个电感线圈之间的互感

(a) PT -对称电路的原理图; (b) PT -对称电路中的宇称反转与时间反演示意图

$\gamma = \sqrt{L/C}/R$ 表示电路系统增益 (耗散) 的强度, $\mu = M/L$ 为电感线圈的互感耦合系数。

将方程组 (1) 与薛定谔方程 $i \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H_{eff} |\psi\rangle$ 进行对应, 同时规定态矢量 $|\psi\rangle = (V_1, V_2, I_1^L, I_2^L)^T$, 就得到了系统的等效哈密顿量 H_{eff} 的表达式

$$H_{eff} = i \begin{pmatrix} -\gamma\omega_0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \gamma\omega_0 & 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L_\mu} & \frac{\mu}{L_\mu} & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{L_\mu} & -\frac{1}{L_\mu} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中 $L_\mu = L(1-\mu^2)$ 。对于四能级的系统, $\hat{P}\hat{T}$ 算

符的矩阵形式为:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^*$$

可以发现这种直接以电压和电流为基得到的 H_{eff} 不是显式的 PT -对称,即在 $\hat{P}\hat{T}$ 算符作用下不是不变量。于是可以对 H_{eff} 进行相似变换,使得新的态矢量 $|\phi\rangle$ 满足 $\langle\phi|\phi\rangle=Q^{[24]}$ 。

根据系统总能量 Q 的表达式

$$Q = \frac{C}{2} (V_1^2 + V_2^2) + \frac{L}{2} (I_1^2 + I_2^2) + MI_1 I_2 \quad (3)$$

再由 $Q = \langle\phi|A|\phi\rangle$ 条件得到相似变换矩阵 A 的表达式

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & \mu L \\ 0 & 0 & \mu L & L \end{pmatrix} \quad (4)$$

对 $|\phi\rangle$ 和 H_{eff} 做相似变换: $|\phi\rangle = A^{\frac{1}{2}} |\psi\rangle$, $H_{PT} = A^{\frac{1}{2}} H_{eff} A^{-\frac{1}{2}}$, 得到新的态矢量与哈密顿量。相似变换后新的态矢量表达式为 $|\phi\rangle = (c_1 V_1, c_2 V_2, c_3 I_1^L + c_4 I_2^L, c_4 I_1^L + c_3 I_2^L)^T$ 。这是一个能量密度为核心的基矢,其中 $c_1 = c_2 = \sqrt{C/2}$, $c_3 = \frac{\sqrt{L(1+\mu)} + \sqrt{L(1-\mu)}}{2\sqrt{2}}$, $c_4 = \frac{\sqrt{L(1+\mu)} - \sqrt{L(1-\mu)}}{2\sqrt{2}}$ 。

相似变换后 $Q = \langle\phi|\phi\rangle$ 。 H 满足在 $\hat{P}\hat{T}$ 共同作用下保持不变,以及 $i \frac{d|\phi\rangle}{dt} = H_{PT} |\phi\rangle$, 有

$$H_{PT} = i \frac{\omega_0}{2} \begin{pmatrix} -2\gamma & 0 & \gamma_0 & -\gamma_{PT} \\ 0 & 2\gamma & -\gamma_{PT} & \gamma_0 \\ -\gamma_0 & \gamma_{PT} & 0 & 0 \\ \gamma_{PT} & -\gamma_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

H_{PT} 的本征值($\hbar=1$)为

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{2} (\sqrt{\gamma_0^2 - \gamma^2} \pm \sqrt{\gamma_{PT}^2 - \gamma^2})$$

$$\omega_{3,4} = -\omega_{1,2} \quad (6)$$

根据式(6), $\gamma_{PT} = \frac{1}{\sqrt{1-\mu}} - \frac{1}{\sqrt{1+\mu}}$ 和 $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\mu}} + \frac{1}{\sqrt{1+\mu}}$ 两个 EP 点将系统的能量谱分隔成了三个区间,对应了系统三个不同的相。设系统的电压和电流信号的通解形式为 $\sum_{n=(1,2,3,4)} A_n e^{i\omega_n t}$ ($\hbar=$

1), 可以发现不同区间内电信号的波形将不同。如图 2(a)所示,在 PT -对称区间, $\gamma < \gamma_{PT}$, 系统本征值全为实数,电压信号为两个正弦信号的叠加(负频率通常表现跟正频率一样);如图 2(b)所示,在 PT -对称破缺区间, $\gamma_{PT} < \gamma < \gamma_0$, 系统本征值转变为复数,电压信号为振幅按指数增益和衰减的正弦信号的叠加;如图 2(c)所示,在过 PT -对称区间, $\gamma > \gamma_0$, 系统本征值为纯虚数,此时电压信号为指数增益和衰减的叠加,不再出现周期振荡。

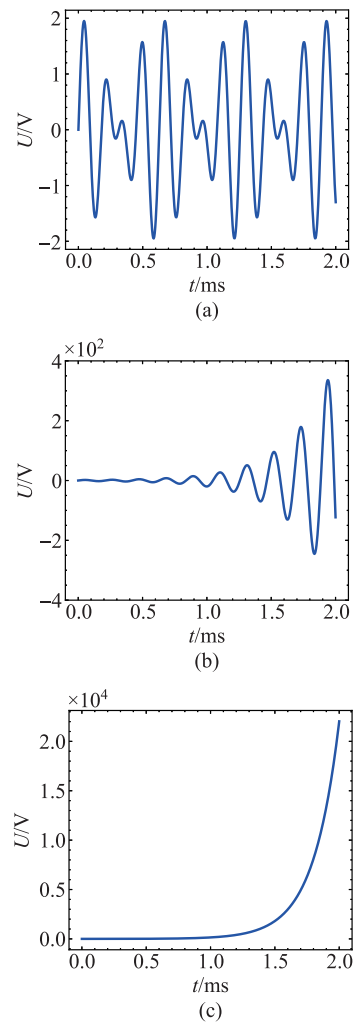


图2 系统处于不同相区间时电压信号 U 的通解形式不同,其中 U 即为 $V_{1,2}$ 。振荡的频率对应本征值的实部,幅值的指数增加对应本征值的虚部
(a) 对应 PT -对称区间, $\gamma < \gamma_{PT}$; (b) PT -对称破缺区间, $\gamma_{PT} < \gamma < \gamma_0$; (c) 过 PT -对称区间, $\gamma > \gamma_0$

在实际实验中,由于电路不属于量子系统,无法制备具有特定相位的能量本征态,因此无法实现 PT -对称哈密顿量 H 对应的纯态,系统的演化

始终处于混合态。这将导致两个后果:(1)增益端和耗散端的电压表现几乎相同,因此在实验过程中只需测量其一端即可;(2)在 PT -对称性破缺后的区间内,只能观察到振荡增益的信号,衰减的信号会迅速衰减至 0,并被增益信号所掩盖^[24]。

当耦合强度固定时,通过调节 γ 的值,可以使系统处于不同的状态区间。根据式(6),当 $\mu = 0.4$ 时,可以得到系统的理论能谱,如图 3 中所示。随着 γ 的增大,系统从 PT -对称相转变为 PT -对称破缺相。在此过程中,能谱的实部在 EP 点处发生简并,虚部也开始变得非零。实频率与复频率的性质差异将具体体现在电信号波形的变化上。由于实验系统是一个非保守的、开放式电路系统,当 γ 超过一定值时,系统的 PT -对称性会自发破缺。破缺后,系统的能量不再守恒,而是处于增益和耗散的状态

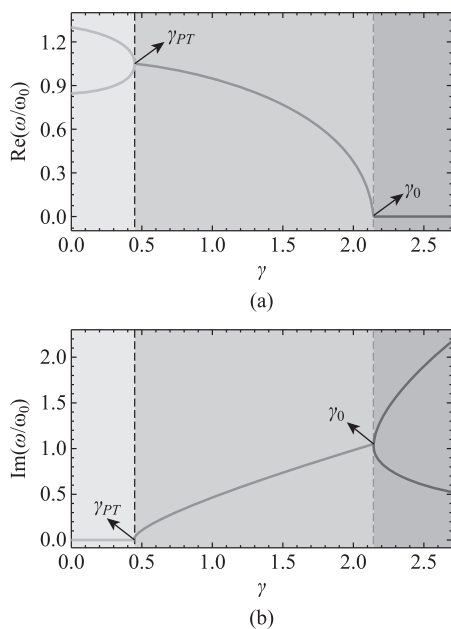


图 3 H 本征值理论曲线($h=1$), $\mu=0.4$

(a) 本征值实部大于 0 部分; (b) 本征值虚部大于 0 部分。 $\omega_{3,4} = -\omega_{1,2}$, 它们出现在 γ 负半轴。负频率在实验中表现与正频率相同,故没有画出负频率部分

2 实验教学设计

2.1 实验教学分层设计

本实验是我院为物理专业大三上学期的学生开设的电子技术实验课程中的一个自选的研究型实验项目,学生在这一阶段已学习了量子力学、电

磁学和电路原理等理论课程。本实验具有很强的综合性,将全面考察学生的实验技能和物理知识。对于不同专业背景的学生,实验内容也可以进一步向不同方向延伸,具有良好的拓展性。以下针对不同知识层次和不同专业的学生,提出建议的实验内容设计。

(1) 基础性实验内容:学习基于 RLC 的 PT -对称电路的基本原理,掌握如何利用 RLC 电路进行量子模拟;了解 PT -对称非厄米量子物理;掌握电磁学中的基尔霍夫第一和第二定理,并理解 PT -对称电路的原理;观测不同相区间电信号的波形,并通过不同的数据处理方法获取系统的频率本征值。

(2) 提高性实验内容:精确校准系统的增益和耗散平衡,精密测量系统哈密顿量的本征值,并确定电路的两个 EP 点。

(3) 研究性实验内容:结合理论分析和数值仿真,系统地调整两个线圈的互感系数,测试不同参数下 PT -对称物理特性的变化,并探索其在无线能量传输等前沿应用中的潜力^[18]。

对于理工科学生,建议开展基础性实验,并鼓励他们完成提高性实验的目标。对于没有相关背景的专业,可以适当调整电路制作的要求,例如使用现成的电路开发板。我们教研团队可以提供相应的开发板和定制服务。对于物理、电子工程和基础科学专业的学生,可以开展研究性实验,并根据他们的专业背景设置不同的课程目标。

2.2 实验教学结构设计

为了获得最佳教学效果并发挥学生的主动性,课程分为三个阶段:课前预习、课堂实践和课后总结,每个阶段都由教师和学生共同完成。

(1) 课前预习,教师会根据实验的教学任务和预期目标,提前 1 周将讲义发给同学,并提供相关的参考文献或者技术文档,布置实验的预期目标。

由于本实验的综合性极强,它将考察学生的实验技能、物理公式推导能力、物理模型的抽象思维能力以及数据处理能力。因此,需要引导学生进行自主学习,规划个人学习目标,并与组内成员沟通协调,以确保在后续实验中顺利完成课堂目标。

在课程开始前,学生需要基本理解非厄米量子力学和 PT -对称性的概念,掌握 PT -对称电路

的基本分析方法,以及电路参数与 PT -对称性之间的关系,并提出一个大致的实验方案。

(2) 课堂实践,教师从基本的对称的物理概念开始,逐步向同学们介绍 PT -电路的基本原理和概念,并根据学生的预习情况,解答学生概念模糊的地方,帮助学生彻底理解自己的实验目标,理清实验方向。

接下来,帮助学生确定实验方案并组织实验。学生需要自行焊接和组装 PT -对称电路,并理解如何调整电路参数。实验的主要任务是测量本征频率和 EP 点,并与数值仿真结果进行比较。

(3) 课后总结,学生对自己的实验过程进行经验总结,撰写实验报告并准备课堂答辩。总结中需要分析实验系统各个变量会对结果产生什么影响,实验值与理论值偏差的原因与解决方案,负电阻非线性效应的理论分析与仿真等等。

之后,教师将批阅并评议学生的实验报告,组织学生进行课堂答辩,并根据答辩情况打分。对于成果特别优秀的学生,教师将鼓励他们进一步完善实验结果,以便其他学生学习。

3 实验方案和内容

3.1 电路设计与实验装置的搭建

本实验装置的框图如图 4 所示。该装置基于图 1(a)所示的 PT -对称 RLC 谐振电路,并增加了以下模块以实现其功能:

(1) 多路复用器 ADG409,用于实现周期性的阶跃激励。ADG409 是一款单芯片 CMOS 模拟

多路复用器,内置有 4 个差分通道。它根据由 2 位二进制地址线 A0 和 A1 确定的地址,将 4 路差分输入中的一路切换至公共差分输出^[25]。当 A0 为高电平且 A1 为低电平时,DA 和 DB 将与 +12V 相连,切断电路耦合,使得电容和电阻处于充能状态;当 A0 和 A1 端口输入为低电平时,DA 和 DB 将与 +12V 断开,切换电路为二聚体耦合模式,启动电路的振荡演化。

(2) 双通道运算放大器 OPA1656,分别作为电压跟随器读取电压,以及组成负电阻的运算放大器。在电路的输出端,运算放大器的输入端与输出端电压始终相同,并且输入端阻抗可视为无穷大。此时运算放大器就作为一个电压跟随器,屏蔽示波器的内阻对电路电阻平衡的破坏。

如图 5,根据运放的“虚短虚断”原理, R_2 的电压等于正相输入电压,当 $R_1 = R_2$ 时,输出端电压就等于两倍的输入端。这样运放作为一个双倍电压放大器构成了一个负电阻。设正相输入到运放的电压为 V_{in} ,从反馈电阻 R 流入的电流为 I_{eff} ,运放的输出电压为 V_{out} 。在增益饱和前,由于 $V_{out} = 2V_{in}$,可以等效为 $R_{eff} = \frac{(V_{in} - V_{out})}{I_{eff}} = -R_1$,构成一个负电阻。

(3) 额外用面包板并联接入平衡电容。因为本实验对于增益和耗散端的电阻电容等参数非常敏感,故需要对电阻和电容的值进行微调,使得电路可以正常工作。为了能够更方便、精细地调节电容平衡,我们外接了面包板来并联电容。

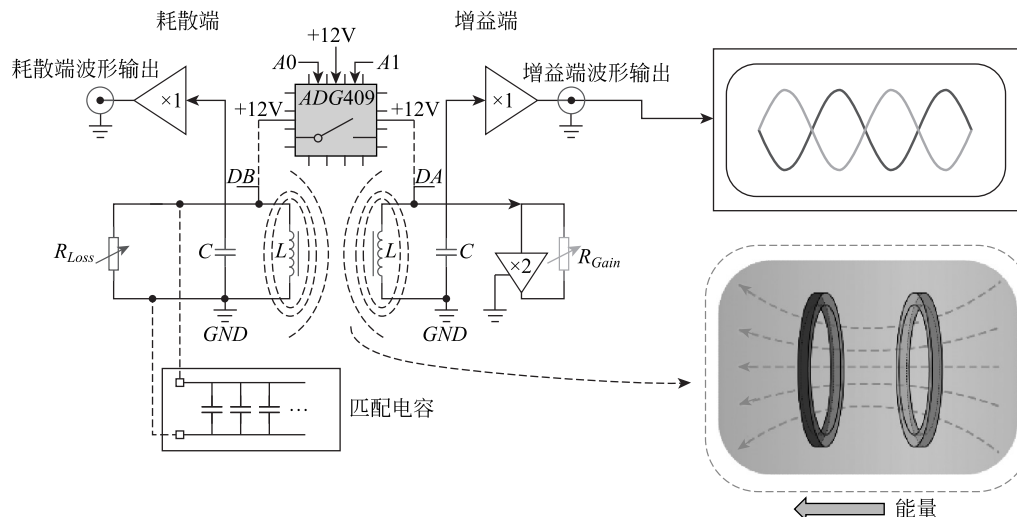
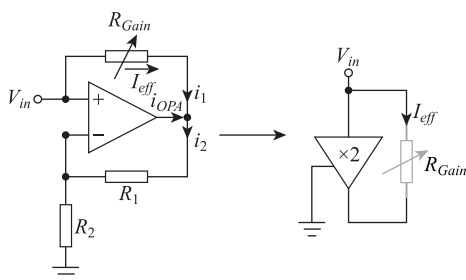


图 4 实验装置示意图。图中包含:ADG409 选通模块,匹配电容模块,输出跟随模块以及负电阻模块等

图5 负电阻等效示意图, $R_1 = R_2 = 100\text{k}\Omega$

3.2 实验材料统计(表1)

表1 实验用材料表

编号	名称	规格参数
1	函数信号发生器	RIGOL, DG4202
2	示波器	RIGOL, DS1104
3	直流稳压电源	RIGOL, DP3831A
4	交流电桥	同惠, TH2827C
5	电感线圈	1mH
6	涤纶电容	47nF, 470nF 若干
7	独石电容	10pF, 100pF 若干
8	薄膜电容	22nF, 2个
9	运算放大器	OPA1656, 2片
10	模拟开关	ADG409, 1片
11	面包板	1个
12	可调电阻	1k Ω , 200k Ω 若干
13	PCB 电路板	自制
14	贴片电容、电阻	若干

3.3 系统校准和调平衡

PT -对称电路对增益和耗散两端的不平衡异常敏感^[26]。由于电路中的线阻、分布电容等效应,初始状态下系统往往是处于匹配不平衡的状态。

根据文献^[27]提供的调节方法,如图6所示,低(高)频指的是式(6)中频率实部较小(大)的本征值。在 PT -对称区间内,如果两个 RLC 电路的谐振频率 ω_0 不相等,将抑制低频或高频模式;电压振幅随时间的衰减或增益则是由于正负电阻大小的不平衡。因此,实验前需要精确匹配电感的大小,实验中则根据波形来判断系统的不平衡状态,并相应调节电阻和电容值。

根据图6的方法,首先调节耗散端电阻 R_{loss} ,使系统的 γ 处于 PT -对称区间,在未进行匹配的

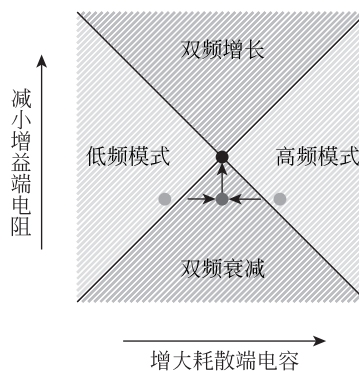


图6 电路平衡调节方式示意图

情况下,电压通常会出现单频衰减或单频增益;接着调节增益端电阻 R_{gain} 使电阻平衡。如果仅观察到单频信号,则需要并联小电容来调节电容值。这可能会因电容的并联等效电阻而破坏电阻平衡,因此需要重新调整电阻平衡。这一过程需要反复进行,直到观测到振幅稳定的双频信号。

在 PT -对称破缺后,由于振幅增益和耗散的幅度较大,无法直接通过波形来判断电阻是否匹配。因此,需要在 PT -对称区间内测量 R_{gain} 和 R_{loss} 的对应关系,并根据这一关系在 PT -对称破缺区间内调节 R_{gain} 和 R_{loss} 。

3.4 实验步骤

确认所有模块功能正常后,可按照以下步骤进行系统哈密顿量的本征值测量:

(1) 根据目标 γ 调节耗散端电阻 $R_{loss} = \sqrt{L/C}/\gamma$ 。按照第2.3节的论述,根据图6调节电路中的电阻和电容以匹配平衡;

(2) 完成第(1)步后,使用示波器导出电压信号波形数据,并记录平衡状态下的可调电阻 R_{gain} 和 R_{loss} 的阻值;

(3) 逐渐增大 γ 的值,重复步骤(1)~(2),直到系统 PT -对称破缺;

(4) PT -对称破缺后,重复步骤(1),然后根据步骤(2)中测量的 R_{gain} 和 R_{loss} 关系调节 R_{gain} 调节完成后导出波形数据;

(5) 继续重复步骤(4),直到 γ 增大至超出 PT -对称区间。实验完成后,处理实验数据,得到结果。

3.5 数据处理方法

数据处理分为两个步骤。首先,使用快速傅里叶变换(FFT)获取信号频率的近似值,如图7所示。尽管存在明显的峰值,但精度尚未达到实验要求。接下来,将这些近似值作为参考输入到拟合程

序中,以获得信号频率的精确值。如图 8 所示,浅色虚线表示拟合曲线,深色实线表示原始数据。

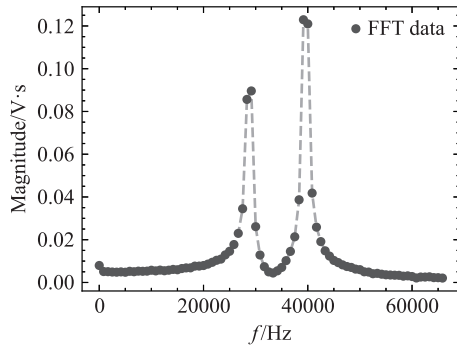


图 7 $\gamma=0.3$ 信号由 FFT 得到的电压频谱,采样频率 $f_s = 1\text{MHz}$,采样点 $N=1200$,FFT 的频率分辨率为 $\frac{f_s}{N}=0.83\text{kHz}$

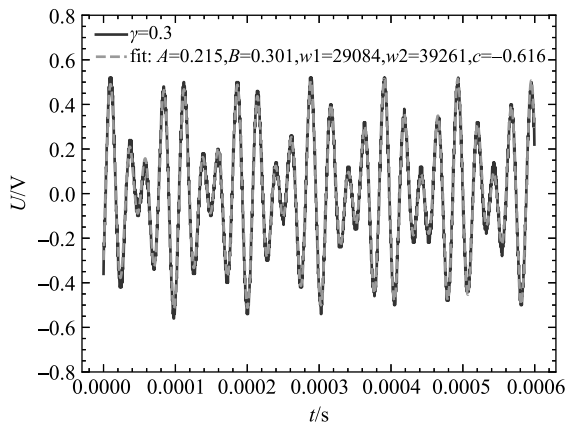


图 8 $\gamma=0.3$ 的拟合处理数据结果, U 即为 $V_{1,2}$

拟合使用的函数以系统的状态而定。例如在 PT -对称区间和 PT -对称破缺区间内,取拟合函数分别为

$$A \sin(\omega_1 t + c_1) + B \sin(\omega_2 t + c_2) + y_0$$

$$A e^{at} \sin(\omega t + c) + y_0 \quad (7)$$

完成实验后,我们将获得不同 γ 值下系统的本征值。理论曲线与实测数据之间存在一定差异,这可能是由于电路中的分布电容和分布电感等参数对实际电容和电感值的影响所致。因此,我们需要对数据进行拟合,或者采用优化方法^[29]。以确定分布电容和分布电感的值,进而修正理论曲线。

4 实验结果与分析讨论

4.1 R_{gain} 和 R_{loss} 变化关系的测量结果

测量结果如图 9 所示,其中横轴为电阻被调节

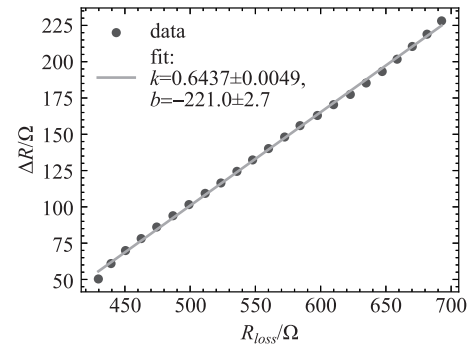


图 9 ΔR 与 R_{loss} 的线性关系拟合

平衡时的耗散端电阻 R_{loss} ,纵轴为此时两端电阻差值 $\Delta R = R_{\text{gain}} - R_{\text{loss}}$,深色散点表示实测数据,浅色直线为拟合直线。由实验数据拟合得到 R_{loss} 和 R_{gain} 之间的线性关系式为 $\Delta R = 0.644(5)R_{\text{loss}} - 221(3)$,拟合的确定系数 R^2 为 0.9996。

4.2 系统本征值的测量结果

实验测量信号的频谱分析如图 10(a) 所示。电压信号在 PT -对称区间为双频信号,随着 γ 值的增大,信号的频域峰值逐渐靠近。当 γ 大于第一个 EP 点时,系统 PT -对称破缺,此时本征值的实部简并,电压信号的双频转变为单频,并且振幅随指数增长,随后振幅趋于稳定是非线性增益饱

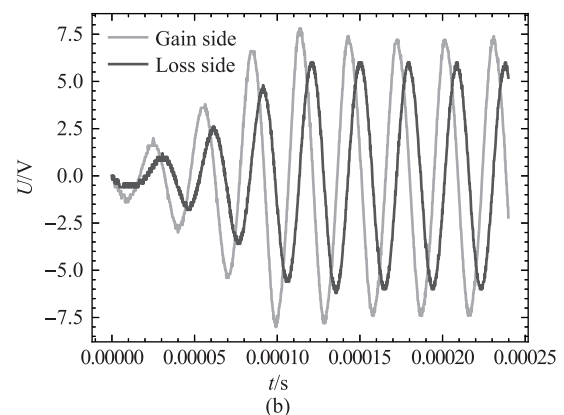
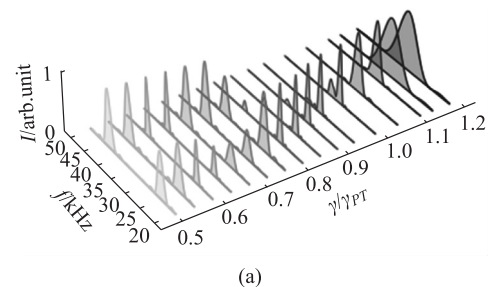


图 10 非线性增益导致的频谱展宽与电压饱和
(a) 不同 γ 的情况下电压波形的频谱图; (b) $\gamma/\gamma_{PT}=1.059$ 的波形,其中 U 即为 $V_{1,2}$

和的结果(波形如图 10(b)所示)。

图 11 展示的是 γ 范围为 0.2~1.4 的系统本征频率 ω 随 γ 变化的测量结果,横轴为 γ ,纵轴为实验测量数据处理得到系统的本征值 ω 与 LC 振荡本征频率 ω_0 的比值。运用数字电桥 TH2827C 测量,得到电容 $C=(C_1+C_2+\Delta C)/2=23.52\text{nF}$,电感 $L=\sqrt{L_1L_2}=0.9998\text{mH}$ 。这样可得本征频率 $\omega_0=32.82\text{kHz}$ 。图 11 中, $\gamma=0.4492$ 为实验中测量得到的第一个 EP 点的值。

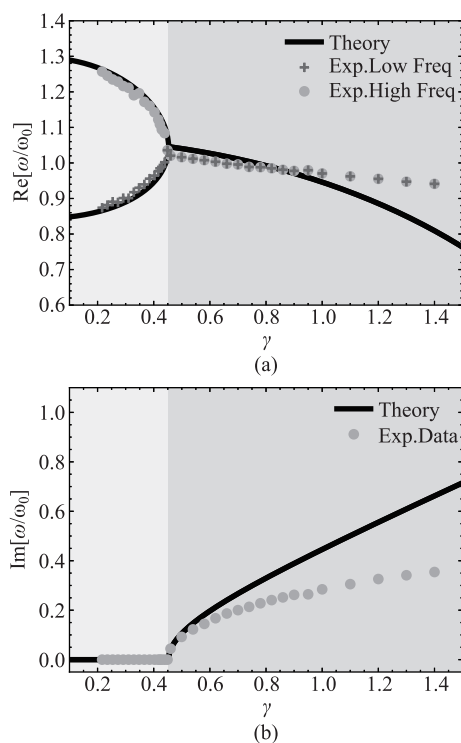


图 11 本征值测量结果。如 1.2 小节所述,由于耗散和增益端的表现类似,这里本征值的获得是通过拟合耗散端的电压结果

(a) 实部本征值; (b) 虚部本征值

4.3 分析与讨论

在 PT -对称区间,本征值的测量结果与理论曲线符合,相对误差在 $\pm 2.00\%$ 以内;实验中实现了对系统从 PT -对称相向 PT -对称破缺相的转变,实验测量得到的 EP 点为 $\gamma=0.4492$ 与 EP 点理论值 $\gamma_{PT}=0.4527$ 之间相对误差为 -0.773% 。

在本教学实验中,我们成功实现了对第一个 EP(Exceptional Point)点的精确测量。此外,该系统还支持由强阻尼效应引起的另一个 EP 点,该点有效地划分了欠阻尼相和过阻尼相。根据 1.2 节的理论分析,该 PT -对称 RLC 电路具有两个

EP 点和三个相区间,与以往的 PT -对称两能级系统相比^[5-7],展现出更为丰富的相图和特性,这对教学和科学研究均具有重要的影响。

然而,对于第二个 EP 点的观测在实验上存在一定的困难。从实验结果来看,在 PT -对称破缺区间,本征值的测量结果与理论曲线出现了偏离,且随着 γ 值的增大,误差愈发明显。该实验现象的主要原因是,由运算放大器构成的负电阻具有非线性效应,导致系统的非线性增益出现饱和现象。在饱和状态下,增益端的饱和增益 γ_{sat} 往往小于耗散端的耗散强度 γ ,从而抑制了系统能量的增益,使得振幅指数增长的信号转为稳态。负电阻的非线性区间取决于运算放大器的供电电压与额定最大电流,其上下限约为供电电压的一半。实验中,我们使用 $\pm 12\text{V}$ 对 OPA1656 运算放大器进行供电。如图 12 所示,当 $\gamma/\gamma_0=1.2600$ 时,增益端的电压迅速接近运算放大器的饱和区间,导致波形畸变,并通过电感耦合限制了耗散端电压的振幅。随着 γ 值的增大,饱和效应的影响也愈发显著,从而导致测量结果与理论值的偏差增大。

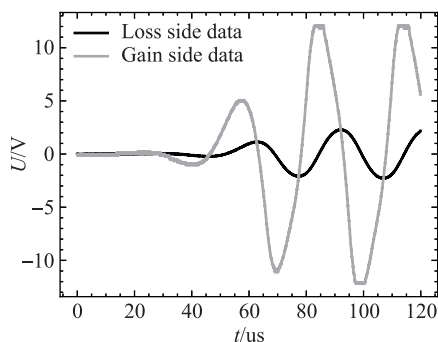


图 12 $\gamma/\gamma_0=1.2600$ 的电压波形

通过比较图 10(b)和图 12,可以发现,尽管非线性增益导致了饱和效应,但饱和稳态的峰峰值 (V_{pp}) 存在显著差异:前者约为 $7\sim 8\text{V}$,后者约为 12V 。因此,在后续实验中,为了探测第二个 EP 点,可以通过监测 V_{pp} 来间接测量。实验中发现,只有当增益(γ)接近临界值(γ_0)时,振幅才能达到 12V 。需要注意的是,这种方法虽然无法对本征值进行精确测量,但可以直观地显示由 PT 对称性破缺引起的第一个 EP 点和由“过阻尼”引起的第二个 EP 点之间的差异。

若要在实验上对第二个 EP 点进行精确观测,需要延长电压和电流的振幅增益至饱和状态的时

间。为此,设计并更换更合适的电容、电感值是较为可行的方案。同时,还可以更换功率上限更大的运算放大器,并调整 TTL 的占空比以减小系统的充电时间,从而降低系统的能量初值。此外,还需要采用更有效的数据处理方法,以便通过分析极短时间内的瞬态信号来获取系统的本征值。

5 结语

本文详细介绍了 PT -对称电路的设计思路,提供了基于该电路的 PT -对称区间和 PT -对称破缺区间的本征值测量方案,并展示了该方案的实验结果。实验结果表明,随着系统增益和耗散强度的增加,本征值的实部逐渐靠近,并在 EP 点处发生简并。EP 点之后,系统表现出 PT -对称破缺,特征为本征值出现虚数部分,从而导致电信号波形的变化。 PT -对称破缺后,本征值测量存在明显误差。本文分析了其原因并提出了可行的解决方案。同时, PT -对称电路对电阻和电容的变化极为敏感,这给实验操作带来了一定的挑战。如何更稳定和便捷地调节 PT -对称电路,以及如何减小 PT -对称破缺后增益饱和效应对实验测量的影响,这些问题值得进一步探讨。

从第一年的教学效果来看,具有量子力学、电磁学和电路原理课程基础,同时具有实验调试能力的学生小组(3~4 人一组)在 6 周 24 个学时,可以很好的完成教学设计中的基础性实验内容,并可以开展部分的提高性实验内容。

在 PT -对称的 RLC 电路系统中,由于实数本征频率与复数本征频率表现在电压波形上的显著不同,因此学生通过不断地调控不同的系统参数,可以直观地观测到系统 PT -对称性自发破缺的过程,也能够清晰地展示 PT -对称系统的动力学特征。这帮助学生理解 PT -对称性在开放系统中的作用,接触到当前开放量子力学的研究前沿。

同时,学生全程参与了从搭建实验装置到数据处理的研究过程,对于系统中各参数对 PT -对称性的影响会具有更深刻的理解,逐渐形成抓住和解决实验主要矛盾的能力,在实验过程中掌握 PT -对称性的核心特征。经由老师的引导,学有余力的学生在研究过程中还会进行相关课题的文献调研,从他人前沿的物理研究成果中汲取实验设计的思路,积累理论推导的技巧等等,极大提升

学生的科研素养和非厄米物理等课题研究的科研能力。

综上所述,本实验内容关联了量子力学、经典的电路实验和电磁学,是一个展示量子物理很好的示例,对量子物理,特别是开放量子物理的学习具有重要的帮助和指导意义。

致谢:作者感谢何振辉教授为本文的撰写提供的宝贵建议,感谢 2023 年广东省实验教学示范中心项目——物理与天文实验教学中心提供的实验条件,感谢中山大学物理与天文学院“电子技术实验二”课程的任课教师:林旭东教授、朱凡副教授、刘培亮副教授和易昭湘副教授的指导。

参 考 文 献

- [1] BENDER C M, BOETTCHER S. Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having PT -Symmetry[J]. Physical Review Letters, 1998; 80: 5243.
- [2] DOREY P, DUNNING C, TATEO R. Spectral equivalences, bethe ansatz equations, and reality properties in PT -symmetric quantum mechanics[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2001, 34: 5679.
- [3] DOREY P, DUNNING C, TATEO R. The ODE/IM correspondence[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2007, 40: R205.
- [4] BENDER C M, KALVEKS R J. Extending PT -symmetry from Heisenberg algebra to E2 algebra[J]. International Journal of Theoretical Physics, 2011, 50: 955962.
- [5] GANAINY R E, MAKRIKIS K G, CHRISTODOULIDES D N, et al. Theory of coupled optical PT -symmetric structures[J]. Optics Letters, 2007, 32: 26322634.
- [6] MAKRIKIS K G, GANAINY R E, CHRISTODOULIDES D N, et al. Beam dynamics in PT -symmetric optical lattices[J]. Physical Review Letters, 2008, 100: 103904.
- [7] GUO A, SALAMO G J, DUCHESNE D, et al. Observation of PT -symmetry breaking in complex optical potentials[J]. Physical Review Letters, 2009, 103: 093902.
- [8] BENDER C M, MANNHEIM P D. PT -symmetry in relativistic quantum mechanics[J]. Physical Review D, 2011, 84: 105038.
- [9] SMITH K J, MATHUR H. Relativistic non-Hermitian quantum mechanics[J]. Physical Review D, 2014, 89: 125014.
- [10] LI J M, WANG T S, LUO L, et al. Unification of quantum Zeno-anti Zeno effects and parity-time symmetry breaking transitions[J]. Physical Review Research, 2023, 5: 023204.
- [11] CARTARIUS H, WUNNER G. Model of a PT -symmetric Bose-Einstein condensate in a d -function double-well poten-

- tial[J]. *Physical Review A*, 2012, 86: 013612.
- [12] HAAG D, DAST D, CARTARIUS H, et al. PT-symmetric gain and loss in a rotating Bose-Einstein condensate[J]. *Physical Review A*, 2018, 97: 033607.
- [13] DEFFNER S, SAXENA A. Jarzynski equality in PT-symmetric quantum mechanics[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114: 150601.
- [14] LI J, HARTEK A K, LIU J, et al. Observation of parity-time symmetry breaking transitions in a dissipative Floquet system of ultracold atoms[J]. *Nature Communications*, 2019, 10855.
- [15] HODAEI H, HASSAN A U, WITTEK S, et al. Enhanced sensitivity at higher-order exceptional points[J]. *Nature*, 2017: 548,187.
- [16] XIAO Z C, LI H N, KOTTOS T, et al. Enhanced Sensing and Nondegraded Thermal Noise Performance Based on PT-Symmetric Electronic Circuits with a Sixth-Order Exceptional Point[J]. *Physical Review Letters*, 2019: 123. 213901.
- [17] SAKHDARI M, HAJIZADEGAN M, LI Y, et al. Ultra-sensitive, Parity-Time-Symmetric Wireless Reactive and Resistive Sensors[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2018, 18, 9548-9555.
- [18] ASSAWAWORRARIT S, YU X, FAN S. Robust wireless power transfer using a nonlinear parity-timesymmetric circuit[J]. *Nature*, 2017, 546(7658): 387-390.
- [19] SCHINDLER J, LI A, ZHENG M C, et al. Experimental study of active LRC circuits with $\mathcal{PT}$ -symmetries [J]. *Physical Review A*, 2011, 84(4): 040101.
- [20] AZEGHAP-SIMO I, FOTSA-NGAFFO F, KENFACK-JIOTSA U. Dynamics of cubic-quintic nonlinear PT-symmetry mechanical oscillators[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2023, 449,133750
- [21] DING L Y, SHI K Y, ZHANG Q X, et al. Experimental Determination of PT Symmetric Exceptional Points in a Single Trapped Ion [J]. *Physical Review Letters*. 126 083604, 2021
- [22] YANG W, LIU W Q, GENG J P, et al. Observation of parity-time symmetry breaking in a single-spin system[J]. *Science*, 2019, 364, 878-880
- [23] FLEURY R, SOUNAS D, ALU A. An invisible acoustic sensor based on parity-time symmetry[J]. *Nature Communication*, 2015, 6,5905
- [24] WANG T S, FANG J X, XIE Z Y, et al. Observation of two $\mathcal{PT}$ transitions in an electric circuit with balanced gain and loss[J]. *European Physical Journal D*, 2020, 74: 167
- [25] ANALOG DEVICES, LC2MOS 4-/8-Channel High Performance Analog Multiplexers Data Sheet[R/OL]. (2009-04-08)[2025-1-16]. <https://www.analog.com/cn/products/adg409.html>
- [26] ZHOU B B, LIU W D, DONG L. The sensitivity of PT-symmetric LC wireless sensors around an exceptional point [J]. *Applied Physics Letters*. 2023, 123(16): 164103.
- [27] FANG J X. Experimental simulation of parity-time symmetry circuit and development of precision magnetic field of cold atom[D]. 2020, SYSU Master Thesis.
- [28] 周荣浩,杨勇,张庆等,金属高频电阻及测量修正方法[J]. *大学物理*,2020,(9): 34-40,50.
- ZHOU R H, YANG Y, ZHANG Q, et al. High-frequency resistance of metal and the method of its measurement and correction[J]. *College Physics*, 2020, (9);34-40, 50. (in Chinese)