

基于 COMSOL 的细长杆弯曲振动 App 开发

徐 银 朱泉冰 谭凯中 杜秀彬 尼 浩 周 伟 王 龙
(中国石油大学(华东)理学院, 山东 青岛 266580)

摘 要 在动态法测量固体材料的杨氏模量实验中, 学生难以理解模型并确定基频共振频率。针对此问题, 本文利用有限元软件 COMSOL: Multiphysics (简称 COMSOL) 进行数字化课程资源建设的探索, 完成了等截面、变截面细长杆弯曲振动的 App 开发。通过输入几何参数、材料参数等, 可自动完成几何建模、网格划分, 并基于有限元计算及后处理可视化, 输出细长杆特征频率 (包括基频和高阶)、节点位置、相应振型及谐波响应等。仿真后特征频率以及节点位置与理论公式计算值进行对比。结果表明, 仿真结果具有准确性、可靠性。App 经过编译可不依赖于 COMSOL 直接运行, 不仅对教学具有良好的辅助作用, 同时在实际工程结构设计、振动控制中具有重要的参考应用价值。

关键词 COMSOL; 弯曲振动; 基频共振频率; App 开发

APPLICATION DEVELOPMENT FOR ELONGATED THIN ROD BENDING VIBRATION ANALYSIS BASED ON COMSOL

XU Yin ZHU Quanbing TAN Kaizhong DU Xiubin NI Hao ZHOU Wei WANG Long

(School of Science, China University of Petroleum (East China), Qingdao, Shandong 266580)

Abstract In dynamic measurements of Young's modulus for solids, students often struggle to grasp the model and identify the fundamental resonant frequency. This paper addresses this by exploring the use of the finite element software COMSOL: Multiphysics (hereinafter referred to as COMSOL) in building digital teaching resources. Specifically, it presents the development of an App for analyzing the bending vibrations of prismatic and tapered slender rods. The App allows users to input geometric and material parameters, automating geometry creation and meshing. Using finite element analysis and post-processing visualization, it outputs key data of slender rods, such as natural frequencies (including fundamental and higher modes), nodal positions, mode shapes, and harmonic responses. A comparison of the simulated natural frequencies and nodal positions with theoretical values shows the simulation's accuracy and reliability. The compiled App can run independently of COMSOL, aiding teaching and serving as a valuable reference in practical engineering structure design and vibration control.

Key words COMSOL; bending vibration; fundamental resonant frequency; App development

收稿日期: 2025-05-12

基金项目: 中国石油大学(华东)探究性实验项目建设(TJ-202113, TJ-202314); 山东省大学生创新创业训练计划项目(S202410425036); 山东省大学生创新创业训练计划项目(S202410425002); 校级大学生创新创业训练计划项目(202511027CX); 中国石油大学(华东)研究生教育教学改革项目(YJG2023051)。

通信作者: 王龙, wanglong@upc.edu.cn。

引文格式: 徐银, 朱泉冰, 谭凯中, 等. 基于 COMSOL 的细长杆弯曲振动 App 开发[J]. 物理与工程, 2025, 35(4): 139-145.

Cite this article: XU Y, ZHU Q B, TAN K Z, et al. Application development for elongated thin rod bending vibration analysis based on COMSOL[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(4): 139-145. (in Chinese)

动态法测量固体材料的杨氏模量实验^[1], 基于等截面细长杆弯曲横振动方程^[2], 通过测量其基频共振频率最终确定材料的杨氏模量, 该方法适用于各种金属材料、脆性材料; 等截面细长杆自由弯曲振动的数学模型为四阶偏微分方程, 该方程的建立和求解学生理解起来有一定的难度^[3]。实际实验操作中, 由于细长杆、换能器、支撑系统的基频、一次谐波、高次谐波等均可以发生共振, 因此需要首先进行基频共振频率的估算, 从而排除频率干扰。同时在实际应用中, 材料可能是变截面, 其截面面积、惯性矩将沿细长杆轴向改变, 基频共振频率的估算将无公式可循。因此基于有限元软件 COMSOL, 开发这样的一套 App, 通过频率提取和模态分析, 获得等截面、复杂截面、变截面细长杆的基频共振频率, 具有非常重要的意义。在实际的工程结构设计、振动控制中, 如塔吊, 烟筒的风振、机翼的振动等, 也可基于该模型^[4]进行研究。因此, App 的开发对于实际工程设计和应用亦有较高的参考价值。

1 细长杆弯曲振动模型

1.1 细长杆自由横振动

密度为 ρ 、长度为 L 且远远大于直径 d 的均匀圆形截面细长杆, 受到竖直方向的载荷, 作微小弯曲振动, 如图 1 所示; 细长杆发生弯曲, 变形后的横截面仍保持为平面且垂直于形心轴, 忽略剪切变形及转动惯量的影响, 符合欧拉-伯努利梁模型^[5]。

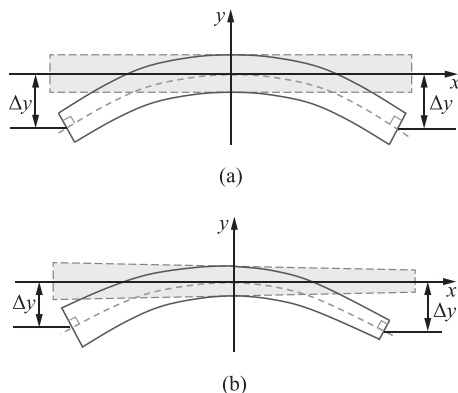


图 1 欧拉-伯努利梁示意图
(a) 等截面细长杆; (b) 变截面细长杆

若细长杆为等截面, 如图 1(a)所示, 其振动方

程可以表示为

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (1)$$

其中, ρ 为材料密度, J 为惯性矩, S 为棒的截面积, E 为材料的杨氏模量。由文献^[6], 其通解可以表示为

$$y(x, t) = (a_1 \cosh Kx + a_2 \sinh Kx + a_3 \cos Kx + a_4 \sin Kx) \cdot b \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

其中, a_1, a_2, a_3, a_4, b 为常数, $\omega = K^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}$, 其中 K 称为本征值, 由自由振动边界条件, 即 $K_i L = 0, 4.730, 7.853, \dots$; 振型函数可以表示为

$$X(x) = a_1 \cosh Kx + a_2 \sinh Kx + a_3 \cos Kx + a_4 \sin Kx \quad (3)$$

式(3)中振型函数为零的点即为节点。

如果细长杆为变截面, 如图 1(b)所示, J, S 均为与横坐标位置 x 相关的函数, 其振动方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + \rho S(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

式(4)为变系数偏微分方程, 通常没有解析解, 只能通过数值方法近似求解。

1.2 考虑瑞利阻尼的强迫振动原理及求解

实际细长杆的振动过程中必然存在阻尼; 考虑常见的瑞利阻尼, 引入质量阻尼 α 和刚度阻尼 β , 假设外部作用周期性的力为 $f(x, t)$, 则其横向振动方程为^[7]

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \rho A \frac{\partial y}{\partial t} + \beta EI \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = f(x, t) \quad (5)$$

根据振型叠加法, 最终通解可写为

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{-\zeta_n \omega_n t} \cos(\omega'_n t) + D_n e^{-\zeta_n \omega_n t} \sin(\omega'_n t)) Y_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y_n(x) \sin(\omega t) \quad (6)$$

其中, C_n, D_n 是由初始条件确定的参数, Y_n 为振型函数, A_n 为强迫振动的模态幅值, ζ_n 为每个模态的阻尼比, ω 为外部作用力的角频率, ω_n 为每个模态的固有频率, ω'_n 为考虑阻尼后的振动频率。

2 开发设计

整个设计分为等截面以及变截面两部分。其

中等截面细长杆弯曲振动作为基本内容,通过梁单元建模求解,可将理论计算、实验测量结合对比;变截面细长杆弯曲振动作为实验的拓展探究,采用实体单元建模。根据模型及预期实现的功能,如特征频率、节点位置、振动模态等,确定变化参数,定制 App 界面,最后编译为 exe 文件发布,具体的开发流程如图 2 所示。

主界面将等截面和变截面细长杆两部分集成,如图 3(a)所示;通过点击动画下方的按钮,可进入相应板块。图 3(b)、(c)分别为等截面、变截面细长杆弯曲振动的交互和输出界面,整体上共分为五个模块:(1)标题菜单栏模块,(2)输入与计算模块,(3)基本原理模块,(4)可视化模块,(5)结果输出模块。

(1) 标题菜单栏模块:标题菜单栏的子菜单中分别是文件、图形以及模型,便于用户保存当前文件、数据,对可视化窗口以及计算求解重新调整等。

(2) 输入与计算模块:在输入与计算模块中,用户可输入细长杆的长度(L)、截面直径(d)、泊

松比(ν)等参数。点击网格划分按钮后,显示网格划分和单元方向。为满足细长条件,规定了参数范围: $L \in (0, 1]$, $d \in (0, 0.1]$ (参数均要大于零,且为国际单位制)。在输出模块的左侧表格中显示计算的特征频率,在可视化窗口中绘制对应特征频率下的节点位置。原理模块中是特征频率的理论值,输出模块右侧显示理论节点位置,以便对比。在等截面表单中引入了谐响应分析、受迫振动分析。谐响应分析时,考虑到实验中用到的金属铜棒,频率提取范围定为 $[0, 3000]$ Hz,其输出分别为细长杆随频率变化的应力曲线以及平均位移曲线。受迫振动是在整个细长杆上施加单位长度上周期性变化的力,输出为杆中心点处的应力-时间变化曲线以及位移-时间变化曲线,其中阻尼类型默认值为瑞利阻尼。

(3) 基本原理模块:等截面中,引入模型的理论推导公式,输出由理论公式计算的特征频率,便于与仿真结果进行对照。

(4) 可视化模块:可以查看计算后的结果曲线、振型动画等。

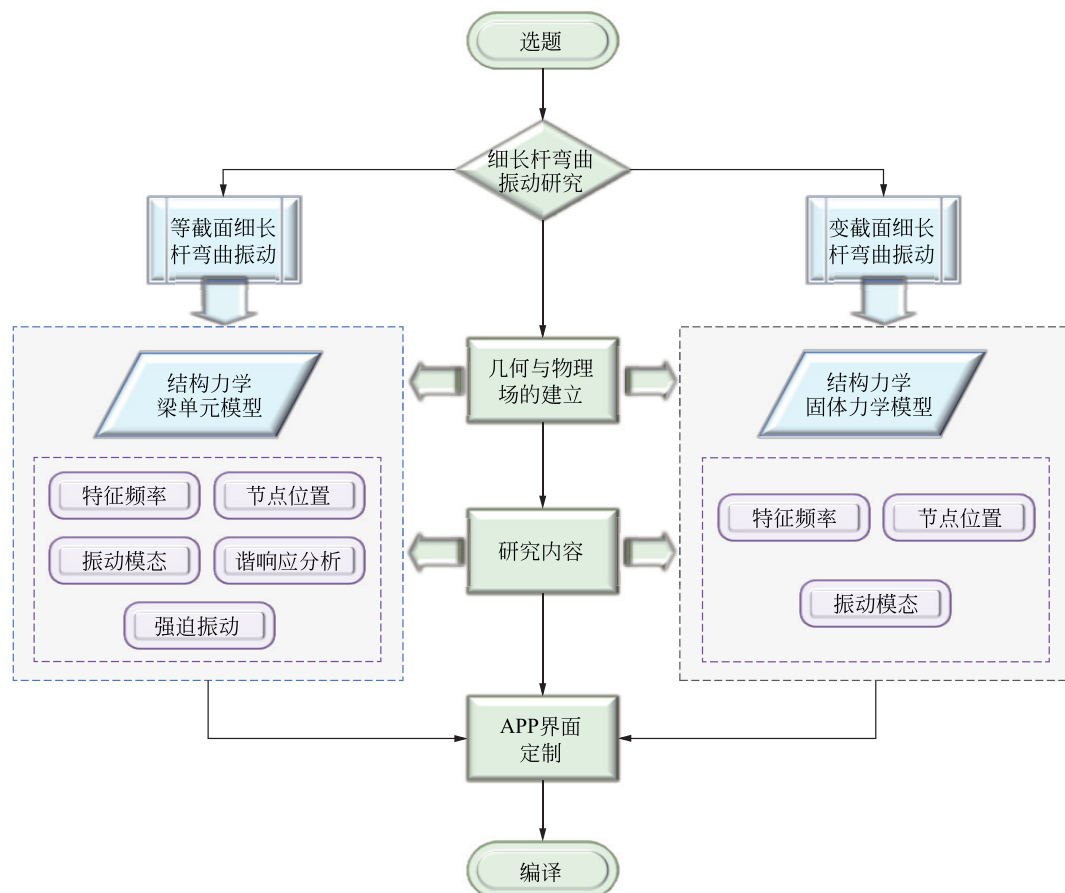


图 2 App 开发流程图界面展示

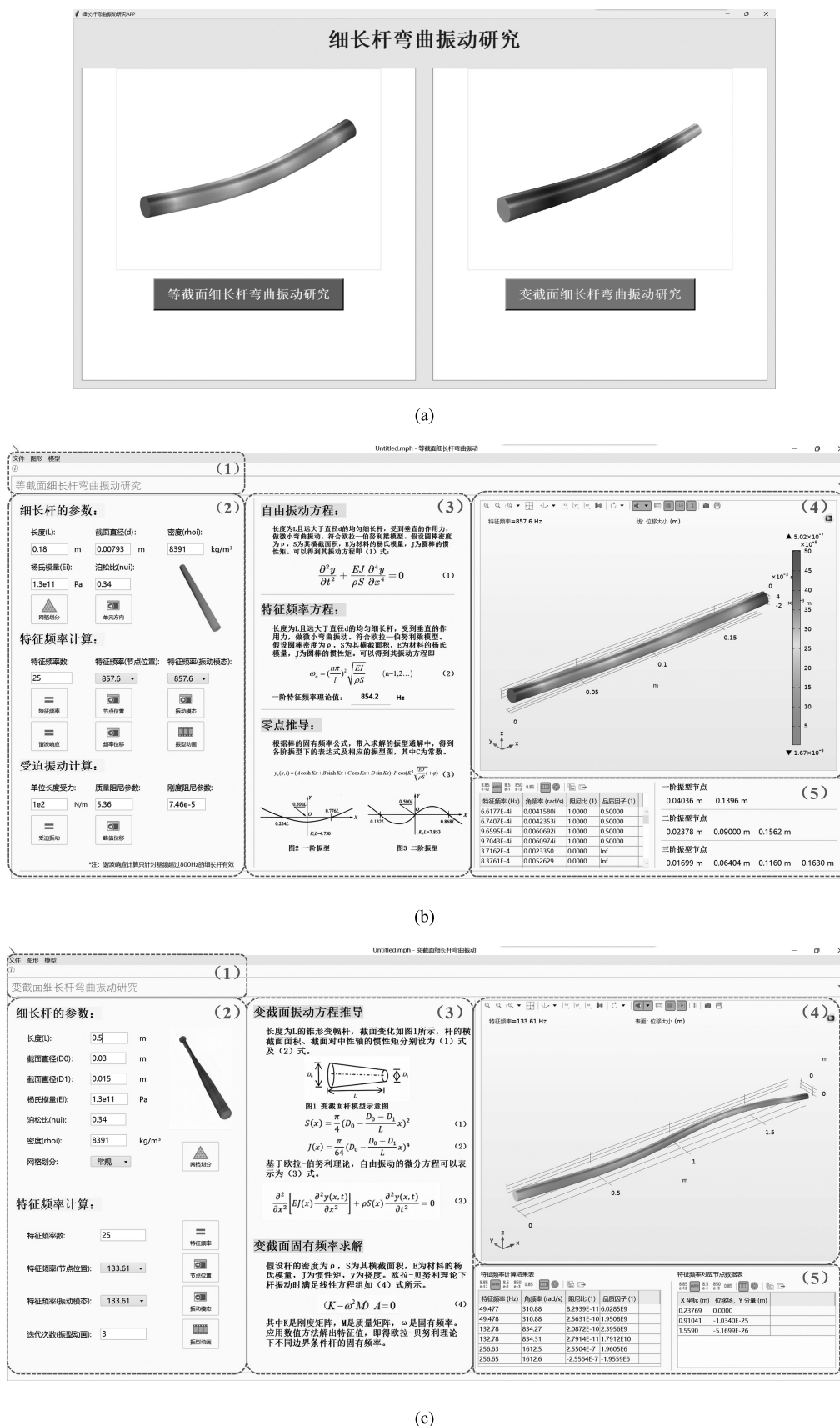


图3 App界面

(a) 软件主界面图; (b) 等截面细长杆研究界面; (c) 变截面细长杆研究界面

(5) 结果输出模块:采用表格显示,左侧表格显示由仿真计算得到的特征频率、阻尼比、品质因子、节点位置等参数;右侧表格显示理论计算出的节点位置;变截面细长杆的界面类似。

3 结果及评价

3.1 振型及节点位置分析

由于振动的能量主要集中在低频,因此主要研究的是细长杆基频、一次谐波、二次谐波及对应振型,等截面与变截面细长杆基频对应的振型及节点位置对比如图 4 所示。

由图 4(a)、(b)可知, $L=0.18\text{m}$, $d=0.0079\text{m}$ 的等截面细长杆在自由振动时,基频为 857.60Hz ; $L=0.18\text{m}$, $D_0=0.01\text{m}$, $D_1=0.05\text{m}$ 的变截面细长杆的基频为 822.23Hz ,色图的颜色代表了细长杆变形时的不同的位移振幅。由图 4(c)、(d)可知,等截面细长杆两端变形对称分布,而变截面两端的振幅不同,节点位置也不再对称,截面的变化影响了节点位置的对称性;通过 App 计算,可以

快速获得共振频率、相应振型和节点位置。

3.2 等截面细长杆周期性强迫振动

假设等截面细长杆整体做周期性强迫振动,取均匀截面细长杆中点位置进行研究。图 5 是输出的等截面细长杆中点处应力、位移-时间的变化关系。

图 5(a)是中心点处应力与时间的关系,达到峰值的时间约为 0.031s ,峰值应力为 0.999MPa ;图 5(b)显示了等截面细长杆中点处位移与时间的关系,达到峰值的时间为 0.031s ,峰值位移为 19.526mm 。杆在受力振动过程中应力与位移均随时间呈现周期性变化,这种应力变化表明杆在振动过程中经历了拉伸和压缩的交替作用。通过观察最大位移及相应时间,可以反映出振动的强度。

3.3 等截面细长杆的谐响应分析

对 $L=0.18\text{m}$, $d=0.0079\text{m}$ 的等截面细长杆进行谐响应分析;选取细长杆的中心点研究,其输出的位移-频率变化关系如图 6 所示。

从图 6 中可以看出基频振动时,频率为

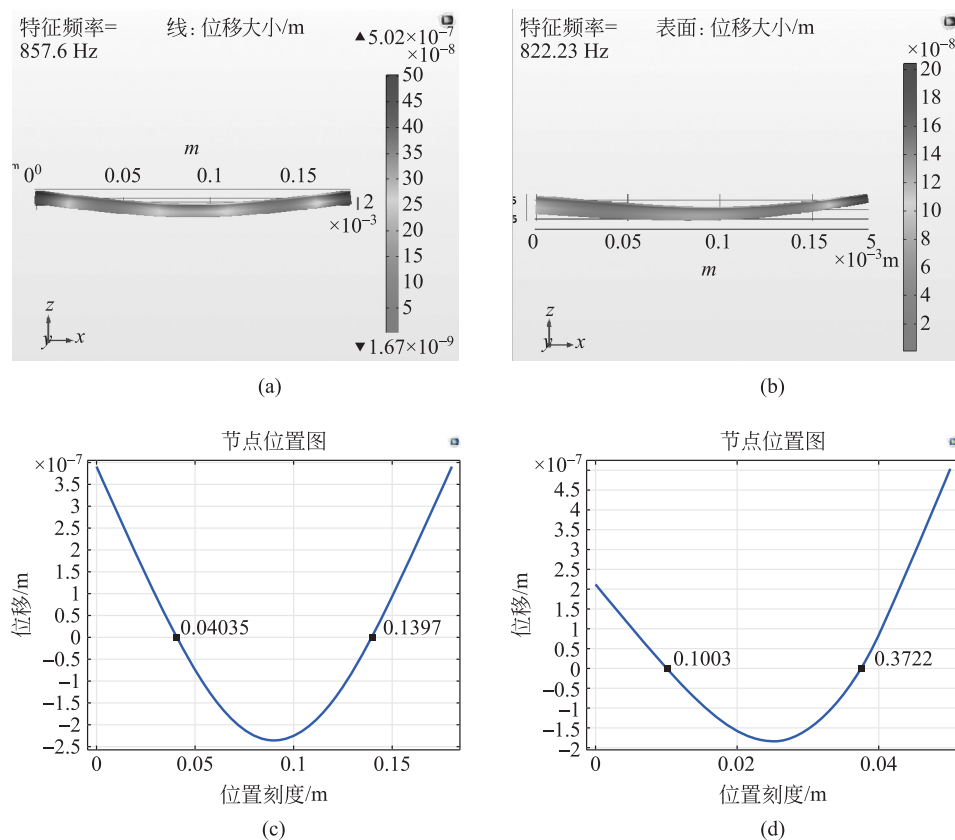


图 4 细长杆的振型及节点位置图

(a) 等截面细长杆基频振型图; (b) 变截面细长杆基频振型图; (c) 等截面细长杆基频节点位置图; (d) 变截面细长杆基频节点位置图

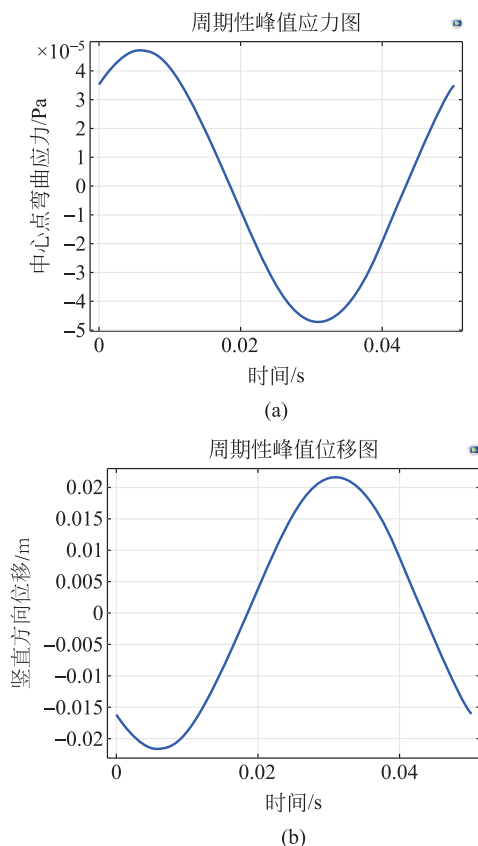


图5 等截面细长杆中点处位移及应力与时间的关系
(a) 细长杆中点处应力与时间关系；(b) 细长杆中点处位移与时间关系

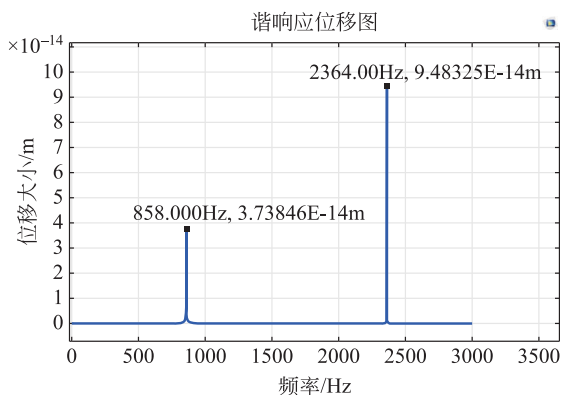


图6 中心点谐波波峰位移图

858.00Hz时,理论计算的基频共振频率值857.60Hz,相对误差约为0.05%,也验证了仿真结果的正确性。

3.4 结果评价

为进一步验证,将等截面细长杆共振频率(基频、一次谐波)以及基频、一次谐波的节点位置及其相对误差列于表1、表2:

表1 共振频率数据对比表

振动模式	理论值/Hz	仿真值/Hz	相对误差/%
基频	829.91	857.60	3.3
一次谐波	2287.59	2364.00	3.3

表2 节点位置数据对比表

	理论值/cm	仿真值/cm	相对误差/%
基频节点1	4.032	4.035	0.074
基频节点2	13.968	13.965	0.021
一次谐波节点1	2.376	2.378	0.084
一次谐波节点2	9.000	9.000	0.000
一次谐波节点3	15.624	15.622	0.013

由表1、表2可知,基频以及一次谐波振动模式的相对误差均小于5%,节点位置的相对误差均小于0.1%,进一步验证了App计算结果的准确性。根据输入几何尺寸参数,系统自动计算单元大小,并按“常规”网格进行划分。本次计算最大单元大小0.018m,最小单元大小0.00324m,共计20个边单元。谐响应分析中边界条件通过施加单位长度的力来控制,因此网格精度、边界条件等均是误差产生的主要原因。

4 结语

通过COMSOL对细长杆弯曲振动的App开发,是基于有限元计算进行数字化物理课程资源建设的探索,其计算输出结果具有科学的物理意义。通过改变不同的参数,不仅可以获得等截面细长杆的节点位置、共振频率和振型,还可进行二者输出结果的直观对比,增加了实验内容的广度和深度,提升了课程的“高阶性”。同时,引导学生将其用于实际工程领域,以解决复杂物理问题,如结构桁架、电视塔的风振问题^[8,9]及振型分析^[10-12];或用于确定桥梁或高层建筑的结构薄弱点,提高其稳定性^[13-15]等,突出了实验“创新性”。通过后续更改模型、修改边界条件等拓展研究,可揭示更多的物理机制,增加了“挑战度”。因此,App资源开发基于实验课程,面向实际应用,不仅可提升课程的“两性一度”,在实际工程领域中亦具有重要的参考价值。

参考文献

[1] 李书光,张亚平,朱海丰.大学物理实验[M].北京:科学

- 出版社, 2018: 229-235.
- LI S G, ZHANG Y P, ZHU H F. College physics experiment[M]. Beijing: Science Press, 2018: 229-235. (in Chinese)
- [2] 樊聪聪, 刘华扬, 程敏熙. 动态法测杨氏模量实验的探索与改进[J]. 大学物理实验, 2016, (1): 51-59.
- FAN C C, LIU H Y, CHENG M X. Exploration and improvement of dynamic method for measuring Young's modulus[J]. College Physics Experiment, 2016, 29(1): 51-59. (in Chinese)
- [3] 沈春根, 盛雪德, 陈寒松, 等. 机械动力学结构模态分析实验的教学改革[J]. 实验科学与技术, 2010, (4): 106-108.
- SHEN C G, SHENG X D, CHEN H S, et al. Teaching reform of modal analysis experiment in mechanical dynamics structure[J]. Experiment Science and Technology, 2010, 8(4): 106-108. (in Chinese)
- [4] 李东波, 赵冬, 华军, 等. 基于 ANN 的碳纤维楠竹锚杆锚固力预测研究[J]. 力学与实践, 2013, (2): 40-45.
- LI D B, ZHAO D, HUA J, et al. Prediction of the anchoring force of carbon fiber bamboo bolts based on ANN[J]. Mechanics and Practice, 2013, 35(2): 40-45. (in Chinese)
- [5] 王战, 吴炜, 楼旭阳, 等. 输入约束下的欧拉-伯努利梁的鲁棒自适应边界振动控制[J]. 南京理工大学学报, 2023, (6): 774-781.
- WANG Z, WU W, LOU X Y, et al. Robust adaptive boundary vibration control of an Euler-Bernoulli beam under input constraints[J]. Journal of Nanjing University of Science and Technology, 2023, 47(6): 774-781. (in Chinese)
- [6] 王龙, 李东霞, 马红章, 等. 动态法测量杨氏模量的理论分析与 Matlab 辅助研究[J]. 大学物理, 2015, (10): 39-42.
- WANG L, LI D X, MA H Z, et al. Theoretical analysis and Matlab-assisted research on dynamic method for measuring Young's modulus[J]. College Physics, 2015, 34(10): 39-42. (in Chinese)
- [7] CLOUGH R W, PENZIEN J. Dynamics of structures[M]. New York: McGraw-Hill, 1975.
- [8] MALASHIN A A. Problems of boundary control over the transverse-longitudinal vibrations of strings [J]. DOKL PHYS, 2011, 56(9): 502-505.
- [9] 侯祥林, 范炜, 贾连光. 变截面压杆临界载荷的迭代算法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2011, (S1): 237-240.
- HOU X L, FAN W, JIA L G. Iterative algorithm for critical load of variable cross-section compression rods[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2011, 43(S1): 237-240. (in Chinese)
- [10] FEDOTOV I A, POLYANIN A D, SHATALOV Y M, et al. Longitudinal vibrations of a Rayleigh-Bishop rod[J]. Doklady Physics, 2010, 55(12): 609-614.
- [11] KULESHOV A A. Mixed problems for the equation of longitudinal vibrations of a heterogeneous rod with a free or fixed right end consisting of two segments with different densities and elasticities[J]. Doklady Mathematics, 2012, 85(1): 80-82.
- [12] IL'IN V A. Longitudinal vibrations of a rod consisting of two segments with different densities and elasticity coefficients but with identical travel times on each segment[J]. Doklady Mathematics, 2009, 80(3): 910-913.
- [13] 王江选. 运行时变结构动力学系统模态辨识方法研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2017.
- WANG J X. Research on modal shape identification method for time-varying structural dynamic systems during operation [D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2017. (in Chinese)
- [14] 齐阳, 赵于博. 既有建筑结构抗震鉴定与加固设计分析[J]. 建设科技, 2023, (2): 27-30.
- QI Y, ZHAO Y B. Seismic identification and reinforcement design analysis of existing building structures[J]. Construction Science and Technology, 2023, (2): 27-30. (in Chinese)
- [15] 韩强, 胡珉磊, 刘英培, 等. 大跨度桥梁抗震分析中的整体有限元法及其应用[J/OL]. 北京工业大学学报, 2024, (12): 1448-1457.
- HAN Q, HU M L, LIU Y P, et al. Application of global finite element method in seismic analysis of long-span bridges[J/OL]. Journal of Beijing University of Technology, 2024, (12): 1448-1457. (in Chinese)