

聚焦科研素养培养的电磁场数值计算仿真实验设计

周洪娟 金涛 曹丙霞 李迎春 宋立众 韩勇

(哈尔滨工业大学(威海)信息科学与工程学院, 山东 威海 264209)

摘要 电磁场数值计算对电磁工程具有重要的意义,但因其复杂性令学生望而却步,历来是电磁场教学上的难点。以理论教学中涉及的电磁边值问题的求解为切入点,围绕数值计算中求解精度和计算效率之间的矛盾问题,循序渐进地设计仿真实验。数值算法采用便于计算机编程实现的时域有限差分法及其改进的交替方向隐式时域有限差分法,鼓励学生自行探索和实践,在加强学生理论基础和扩展认知的同时,培养和提高学生的综合科研素养。

关键词 实验教学;仿真实验;电磁场数值计算;科研素养

DESIGN OF ELECTROMAGNETIC FIELD NUMERICAL SIMULATION EXPERIMENT FOCUSING ON THE CULTIVATION OF SCIENTIFIC RESEARCH LITERACY

ZHOU Hongjuan JIN Tao CAO Bingxia LI Yingchun SONG Lizhong HAN Yong

(School of Information Science and Engineering, Harbin Institute of Technology (Weihai), Weihai, Shandong 264209)

Abstract Numerical electromagnetic field calculation is vital for electromagnetic engineering, but its complexity intimidates students, making it a teaching challenge. This paper designs simulation experiments step by step, starting with electromagnetic boundary value problem solving in theoretical teaching. It focuses on the contradiction between solution accuracy and computational efficiency in numerical calculations. The numerical algorithm uses the finite difference time domain method and the improved alternating direction implicit finite difference time domain method, which are easy for computer programming. Students are encouraged to explore and practice to strengthen their theoretical knowledge, expand their cognition, and

Key words experimental teaching; simulation experiment; numerical calculation of electromagnetic field; scientific research literacy

电磁场边值问题的求解对天线设计、电波传播以及电磁兼容等电磁工程具有重要的意义^[1-5]。边值问题的求解方法分为解析法和数值法两大类。解析法通常只适合一些边界形状简单的边值问题的求解,而数值法,如矩量法^[6]、有限元法^[7]

和时域有限差分法(FDTD)^[8-9]等,可灵活处理各种复杂的边界,更具有通用性。本科教学的重点一般为一些特殊边值问题的解析求法,而对更通用的数值法通常一带而过,或者只借助于数值计算软件实现,导致学生对软件底层的求解技术一

收稿日期: 2025-01-03

基金项目: 哈尔滨工业大学(威海)教学改革研究项目(2023KTZZ05); 哈尔滨工业大学(威海)实验教学和教学实验室建设研究项目(2024SYZZ01); 哈尔滨工业大学(威海)课程思政教育教学改革项目(KCSZZZ202306, KCSZZZ202314)。

通信作者: 周洪娟, zhouhongjuan821@hit.edu.cn。

引文格式: 周洪娟, 金涛, 曹丙霞, 等. 聚焦科研素养培养的电磁场数值计算仿真实验设计[J]. 物理与工程, 2025, 35(4): 54-59.

Cite this article: ZHOU H J, JIN T, CAO B X, et al. Design of electromagnetic field numerical simulation experiment focusing on the cultivation of scientific research literacy[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(4): 54-59. (in Chinese)

知半解,难以达到电磁方向专业人才的培养要求。另外,国内的主流电磁数值计算软件一直受到国外的垄断,迫切需要开展电磁类课程改革,为国家科技自立自强培养专业本领过硬、富有使命担当创新型人才。

本实验以容易入手的矩形谐振腔的求解为例,针对数值法计算中涉及的求解精度和计算量矛盾的问题及其解决方法来设计实验,实验中采用 FDTD 和交替方向隐式时域有限差分法(ADI-FDTD)两种求解方法,算法代码比较容易实现,实验内容具备可伸缩性,确保不同层次学生的培养要求。该实验在加强学生理论和扩展认知的同时,注重启发学生的探索热情,培养和提高学生的综合科研素养。

1 实验设计

1.1 设计目标

本次实验主要面向高年级电磁方向本科生或研究生开设。电磁场的数值计算以其抽象性和繁琐性著称,本次实验设计力求问题简单、算法易于实现,在巩固课堂理论知识的同时,聚焦数值计算中涉及的求解精度和计算量矛盾的工程问题,引发学生的思考和探索。同时,注重实验过程中的思政教育,激发学生对未知的探索欲,建立科研意识,促使学生建立一套完整的集文献综述、仿真系统搭建、数据分析与推理、总结报告撰写与汇报等为一体的科研思维和方法,培养其勇于探索、团结合作和不断创新的科研精神等,提高学生的综合科研素养。

1.2 实验内容

本实验围绕矩形谐振腔边值问题的求解及其谐振模式分析,采用由易到难、循序渐进的方式来设计实验。实验过程设计如下:

第一步,基于分离变量法解析结论分析谐振腔内主模的电磁场,并讨论主模的激励方式。扎实的基础知识是进行科研工作的前提,这一步紧扣课堂理论教学的内容,同时强化了理论教学中难以顾及或详细分析的谐振腔的激励问题,理论联系实际,引发学生思考。

第二步,基于 Matlab 仿真软件自行编程实现 FDTD 方法求解,进行数据处理得到主模谐振频率。这一步除了需要用到电磁理论相关知识,包括麦克斯韦方程组和理想导体边界条件之外,还需离散傅里叶变换等数字信号处理方法,同时需

要具备计算机编程方面的实践能力和比较强的自主学习能力。可以鼓励有能力的同学进一步探索谐振腔的电、磁等激励方式,讨论仿真得到的高阶模式,并进一步摸索高阶模式的抑制方法等;对有计算机编程方面兴趣的同学,可以鼓励他们使用 C 语言实现算法,并尝试基于 GPU 的并行运算的实现。这一步是对学生掌握科研方法、建立科学思维的系统训练。

第三步,讨论 FDTD 方法的稳定性条件。引导学生发现 FDTD 算法在应用中的缺陷,鼓励有能力的同学去翻阅相关的文献,查找 FDTD 的相关演进算法,激发其探索未知的兴趣。这一步注重培养学生发现问题、谨慎求证和勇于探索的科研态度。

第四步,基于 Matlab 仿真软件自行编程实现 ADI-FDTD 方法求解,讨论相比 FDTD 算法,该算法对时间步长的放宽程度。进一步提升学生的自学能力和实践能力,有能力的同学可以进一步尝试其他演进算法,如基于加权 Laguerre 多项式的时域有限差分法(WLP-FDTD)等^[10]。这一步开启学生新一轮科研知识、科研方法、科研态度和思维的训练与培养,为创新型、研究型人才的培养奠定基础。

2 各个算法公式及算法实现

2.1 解析表达式

设矩形谐振腔三边尺寸分别为 a 、 b 和 l ,分别对应 x 、 y 和 z 三个坐标轴,内部填充介电常数为 ϵ 、磁导率为 μ 的理想介质,边界为理想导体。若三边的尺寸满足 $a > b > l$,以 z 轴为参考方向,则最低阶谐振模式为 TM_{110} 模式,由分离变量法得到主模电磁场表达式如式(1)所示,其中, E_m 由激励源决定,谐振频率如式(2)所示。

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z(x, y, z, t) = \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cdot \\ \quad \text{Re}(E_m e^{j2\pi f_{110}t}) \\ H_x(x, y, z, t) = \frac{\omega \epsilon a^2 b}{\pi(a^2 + b^2)} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \\ \quad \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) \text{Re}(jE_m e^{j2\pi f_{110}t}) \\ H_y(x, y, z, t) = -\frac{\omega \epsilon a b^2}{\pi(a^2 + b^2)} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \\ \quad \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \text{Re}(jE_m e^{j2\pi f_{110}t}) \end{array} \right. \quad (1)$$

$$f_{110} = \frac{\sqrt{(a)^2 + (b)^2}}{2ab\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (2)$$

2.2 FDTD 算法公式

FDTD 算法将电磁场分量按照 Yee 网格在空间上离散,采用中心差分方法将麦克斯韦方程中的偏微分方程离散得到各个场变量的时间递进关系式^[11]。式(3)~(5)为 TM 模式下的 E_z 、 H_x 和 H_y 分量的迭代方程,需要说明的是,若要讨论激励源的加载方式等,需要导出全六分量的迭代公式。

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) &= E_z^n\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) + \\ &\frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} \left[H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) - \right. \\ &H_y^{n+1/2}\left(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) \left. \right] - \\ &\frac{\Delta t}{\epsilon \Delta y} \left[H_x^{n+1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) - \right. \\ &H_x^{n+1/2}\left(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) \left. \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} H_x^{n+1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) &= \\ &H_x^{n-1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) - \\ &\frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \left[E_z^n\left(i, j + 1, k + \frac{1}{2}\right) - \right. \\ &E_z^n\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) \left. \right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) &= \\ &H_y^{n-1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) + \\ &\frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \left[E_z^n\left(i + 1, j, k + \frac{1}{2}\right) - \right. \\ &E_z^n\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) \left. \right] \end{aligned} \quad (5)$$

其中, Δx 、 Δy 、 Δz 代表三个方向的网格长度,要求不大于主模波长的 $1/12$; Δt 为时间步长,需满足式(6)所示的稳定条件。

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}} \quad (6)$$

2.3 ADI-FDTD 算法公式

ADI-FDTD 将 $n \rightarrow n+1$ 时间步分解成 $n \rightarrow n+1/2$ 和 $n+1/2 \rightarrow n+1$ 两个子时间步,对 TM 模式方程的 x 向和 y 向偏导交替取隐式和显式差

分格式,理论上具有无条件稳定的特点^[11]。 $n \rightarrow n+1/2$ 子时间步的求解顺序为 $H_x^{n+1/2} \rightarrow E_z^{n+1/2} \rightarrow H_y^{n+1/2}$, $n+1/2 \rightarrow n+1$ 子时间步的求解顺序为 $H_y^{n+1} \rightarrow E_z^{n+1} \rightarrow H_x^{n+1}$ 。其中, H_x 和 H_y 的迭代公式如(7)~(10)所示, E_z 分量通过求解方程 $AX=Y$ 得到, X 为待求的变量 $E_z^{n+1/2}$ 或 E_z^{n+1} ($i=1, 2, \dots, i_{\max}$)组成的列向量,系数矩阵 A 和列向量 Y 如式(11)所示。

$$\begin{aligned} &H_x^{n+1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) \\ &= H_x^n\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) - \\ &\frac{\Delta t}{2\mu \Delta y} \left[E_z^n\left(i, j + 1, k + \frac{1}{2}\right) - \right. \\ &E_z^n\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) \left. \right] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) \\ &= H_y^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) + \\ &\frac{\Delta t}{2\mu \Delta x} \left[E_z^n\left(i + 1, j, k + \frac{1}{2}\right) - \right. \\ &E_z^n\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) \left. \right] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &H_x^{n+1}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) \\ &= H_x^{n+1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) - \\ &\frac{\Delta t}{2\mu \Delta y} \left[E_z^{n+1}\left(i, j + 1, k + \frac{1}{2}\right) - \right. \\ &E_z^{n+1}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) \left. \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &H_y^{n+1}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) \\ &= H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) + \\ &\frac{\Delta t}{2\mu \Delta x} \left[E_z^{n+1}\left(i + 1, j, k + \frac{1}{2}\right) - \right. \\ &E_z^{n+1}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) \left. \right] \end{aligned} \quad (10)$$

$$A = \begin{bmatrix} b & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & a & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & a & b \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_{i_{\max}} \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中,系数 a 、 b 和 c_i 如式(12)~(14)所示。 $n \rightarrow n+1/2$ 子时间步,有 $\Delta = \Delta x, k = n; n+1/2 \rightarrow n+1$ 子时间步,有 $\Delta = \Delta y, k = n+1/2$ 。

$$a = -\frac{\Delta t^2}{4\mu\epsilon\Delta^2} \quad (12)$$

$$b = 1 + \frac{\Delta t^2}{2\mu\epsilon\Delta^2} \quad (13)$$

$$c_i = E_z^k \left(i, j, k + \frac{1}{2} \right) + \frac{\Delta t}{2\epsilon\Delta x} \left[H_y^k \left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) - H_y^k \left(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{\Delta t}{2\epsilon\Delta y} \left[H_x^k \left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) - H_x^k \left(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (14)$$

2.4 算法实现过程

无论采用何种编程语言,FDTD 算法和 ADI-FDTD 算法的实现过程是类似的,如图 1 所示。第一步,进行参数设定,包括谐振腔的物理和电磁参数、划分网格参数、时间步长和采样数据点数、激励源参数等的设定,对 ADI-FDTD 算法,还包括式(11)中所示的系数矩阵 A 的设定。第二步,场量赋初值,在没有先验知识的情况下,通常将待求的场量初值设置成零。第三步,进入算法的主体,即场量循环迭代过程,循环的次数由设置的采样数据点数来决定,其中,FDTD 算法直接由第 n 时间步的场量经过公式(3)~(5)得到第 $n+1$ 时间步的场量,ADI-FDTD 算法需要经过 $n \rightarrow n+1/2$ 和 $n+1/2 \rightarrow n+1$ 两个子时间步的迭代,过程和公式如 2.3 节所示。第四步,进行数据分析和结果呈现,对采样数据进行傅里叶变换、提取谐振频率以及作图等操作。



图 1 算法实现过程简图

这里需要强调的是,第二步和第三步中隐含着谐振腔边界条件的设定。本课题采用理想导体边界条件,即边界处切向电场和法向磁场分量为零,这需要在场量赋零初值后的迭代运算中将满足边界条件的点和场量去掉。在算法的编程实践

中,除了复杂的算法公式的推导和实现,对电磁边值问题求解非常关键的边界条件的设置是学生最容易忽视和出差错的地方,例如,在代码中仅仅是数字 1 变为数字 2,看似不起眼却包含着深刻的科学问题。这一步除了要求学生具备扎实的理论基础外,还需具备严谨的科研态度,不放过任何一个细节的推敲和处理。

3 仿真结果初步分析

本次设计中,设 $a = 60\text{mm}$, $b = 25\text{mm}$, $l = 12.5\text{mm}$,腔内填充真空,则由式(2)得主模谐振频率为 6.5GHz ,进一步得到 10GHz 以内两个次高阶模式 TM_{210} 和 TM_{310} 的谐振频率分别近似为 7.8GHz 和 9.6GHz 。由式(1)可知,在 x 和 y 向的中央激励时,主模谐振最强。

FDTD 算法中设置三边的离散尺寸分别为 $\Delta x = 2.5\text{mm}$ 、 $\Delta y = 1\text{mm}$ 、 $\Delta z = 0.5\text{mm}$,由式(6)的稳定性条件得 $\Delta t \leq 1.47\text{ps}$,取 $\Delta t = 1.25\text{ps}$,设置频率分辨率 $\Delta f = 0.01\text{GHz}$,采用 z 向的线电流脉冲源进行激励。仿真提取任一点的采样数据,做离散傅里叶变换,分析主模的谐振频率。

图 2 为点 $(3\Delta x, 7\Delta y, 7\Delta z)$ 处 E_z 分量在 10GHz 以内的归一化频谱,其中,子图(a)和(b)分别为激励源加载在 x 和 y 向的 $1/2$ 和 $1/5$ 处的分析结果。很明显,子图(a)的频谱中除了主模,还有 TM_{310} 模式,与预期不同的是: TM_{210} 模式未出现,究其原因是在 x 和 y 向的 $1/2$ 处该模式的场量恰好为零,导致该模式无法被激励;而子图(b)显然避免了这种情况。此处,可以鼓励有能力的同学尝试更多激励方式的讨论,如磁环激励方式的仿真等,加深对课堂上理论知识的理解。同时,也可以结合式(1)所示的主模的场表达式,提取分析不同点处的电磁场分布;进一步调整空间离散尺寸,讨论数值计算的精度问题。

这部分内容除了强化学生的理论知识外,对出现的与预期不符的实验现象的解释也锻炼了学生发现问题、解决问题的能力,让学生明白一个道理:任何现象或问题的出现都是有原因的,都可以通过科学的方法找到解决方案,要树立进行科学研究信心。

进一步验证表明:在以上参数设置下, $\Delta t \geq$

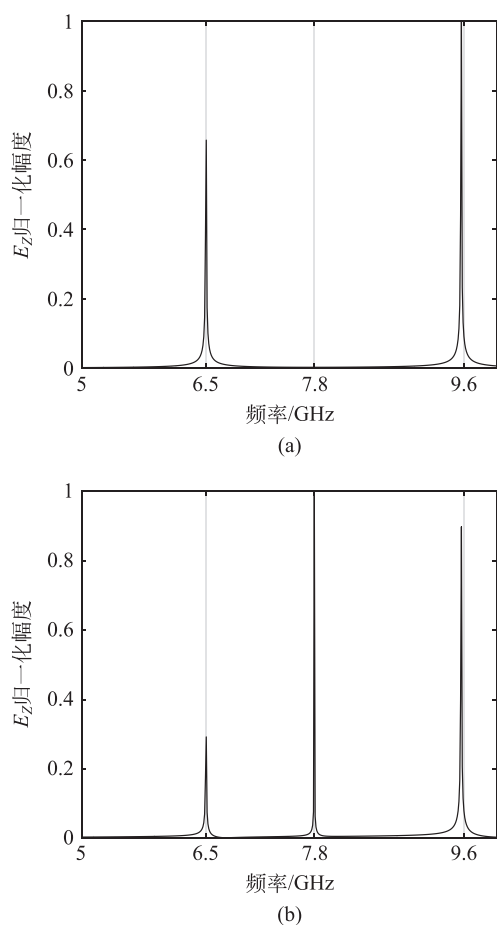
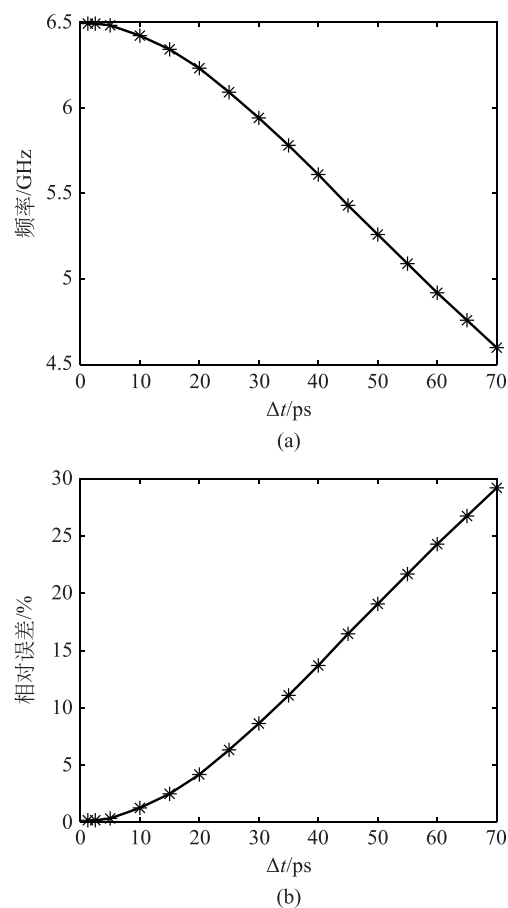


图2 基于FDTD算法的仿真频谱

(a) 电流加载在 x 和 y 向的 $1/2$ 处; (b) 电流加载在 x 和 y 向的 $1/5$ 处

3.2ps 时 FDTD 算法出现数值发散的问题,该上限略高于式(6)的结论,但采样率仍然远远高于奈奎斯特采样率,导致低的计算效率。进一步采用理论上具有无条件稳定性的 ADI-FDTD 算法,在相同的网格尺寸和采样数据长度的前提下,讨论不同的 Δt 取值对计算结果的影响。图 3(a)为最低阶谐振模式谐振频率随 Δt 的变化,图 3(b)为谐振频率取值相对于真实值 6.5GHz 的误差变化。可见,ADI-FDTD 算法可以提高计算效率,能在比较高的 Δt 值下确保数值计算结果不发散,但同时带来计算误差的增大,在实际应用中应该在计算效率和准确度间折中选择 Δt 值。

这部分内容除了丰富学生的认知、锻炼其解决问题的能力外,也让学生体会到:科学研究是无止境的,任何一种科学方法都不是完美的,没有最好只有更好,要勇于创新 and 突破。

图3 ADI-FDTD 算法计算结果随时间离散度 Δt 的变化

(a) 主模谐振频率值的变化; (b) 相对误差的变化

4 结语

电磁场数值计算因其数学公式繁杂、方法多变而难以接近,历来是教学中的难点和痛点。本次实验设计本着由易到难、循序渐进的原则,引导学生打开进入电磁场数值计算领域的大门。在选题上,矩形谐振腔电磁边值问题紧扣理论教学,简单明了,学生入题容易;在内容设计上,紧紧围绕着数值计算中致力于解决的求解精度和计算效率之间的矛盾问题,丰富学生的认知,提高其自主学习能力;在算法实现上,FDTD 及其相关算法原理较简单,鼓励学生自己动手编写代码,提高其动手实践能力和团队协作能力,并体会到分析问题、解决问题的乐趣;在结果呈现上,提高学生数据分析与推理、科研报告撰写和结果陈述与展示的综合科研能力。通过该实验,让学生体验到理论预研、查阅文献自学、算法实现、数据分析、撰写报告以

及陈述结果的全过程,为学生的科研素养培养提供启蒙教育解决方案。

参 考 文 献

- [1] 李晓鹏,曹雨露,蔡惠萍,等.宽波束双频同轴共口径高精度 GNSS 天线设计[J].微波学报,2024,40(5):91-96.
LI X P, CAO Y L, CAI H P, et al. Design of dual-band coaxial aperture-shared high-precision GNSS antenna with wide beamwidth[J]. Journal of Microwaves, 2024, 40(5): 91-96. (in Chinese)
 - [2] AHMAD A, CHOI D, ULAH S. A compact two elements MIMO antenna for 5G communication[J]. Science Report, 2022, 12: 3608.
 - [3] XU R, CHEN Z N. A compact beamsteering metasurface lens array antenna with low-cost phased array[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2021, 69(4): 1992-2002.
 - [4] 刘阳,周海京,郑宇腾,等.高性能计算在目标电磁散射特性分析中的应用[J].电波科学学报,2019,34(1):3-11.
LIU Y, ZHOU H J, ZHENG Y T, et al. Applications of high performance computing in analyzing the electromagnetic scattering characteristics of targets[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2019, 34(1): 3-11. (in Chinese)
 - [5] 肖培,李佳维,张超,等.双层屏蔽腔内线缆负载电磁耦合的 EMT 分析方法[J].微波学报,2021,37(5):52-57.
XIAO P, LI J W, ZHANG C, et al. An EMT analysis method for calculating the electromagnetic coupling of transmission line inside a double-layer cavity[J]. Journal of Microwaves, 2021, 37(5): 52-57. (in Chinese)
 - [6] 于少帅,任新成,朱小敏,等.土壤表面与运动目标复合电磁散射的矩量法研究[J].微波学报,2024,40(1):60-66.
YU S S, REN X C, ZHU X M, et al. Study on composite electromagnetic scattering from a moving target above the soil surface by the method of moment[J]. Journal of Microwaves, 2024, 40(1): 60-66. (in Chinese)
 - [7] XIAO L, FIANDACA G, ZHANG B, et al. Fast 2.5D and 3D inversion of transient electromagnetic surveys using the octree-based finite-element method[J]. Geophysics, 2022, 87(4): E267-E277.
 - [8] CHEN W, GUO L X, LI J T. Research on the FDTD method of scattering effects of obliquely incident electromagnetic waves in time-varying plasma sheath on collision and plasma frequencies[J]. Physics of plasmas, 2017, 24(4): 042102.
 - [9] 刘健,郭元龙,张庆一,等.时域有限差分方法分析水下目标散射电场分布[J].实验室研究与探索,2023,42(10):123-129.
LIU J, GUO Y, ZHANG Q, et al. Analysis of scattering electric field distribution of underwater target by time-domain finite-difference method[J]. Research and Exploration in Laboratory, 2023, 42(10): 123-129. (in Chinese)
 - [10] 陈伟军,龙世瑜,刘如军.电磁场课程设计中新的数值计算方法探索[J].实验科学与技术,2017,15(6):76-79.
CHEN W J, LONG S Y, LIU R J. Exploration of new numerical methods in the course design of electromagnetic field[J]. Experiment Science and Technology, 2017, 15(6): 76-79. (in Chinese)
 - [11] 葛德彪,闫玉波.电磁波时域有限差分方法[M].3版.西安:西安电子科技大学出版社,2011.
GE D B, YAN Y B. Finite-difference Time-domain method for electromagnetic waves[M]. 3th ed. Xi'an: Xi'an University of Electronic Science and Technology Press, 2011. (in Chinese)
- (上接第 34 页)
- [8] 刘婷,熊泓媛,黄映洲,等.开发基于亥姆霍兹谐振腔的通风吸声超材料创新性实验[J].物理与工程,2024,34(5):153-159.
LIU T, XIONG H Y, HUANG Y Z, et al. Development of an innovative experiment on ventilated sound-absorbing metamaterials based on Helmholtz resonators[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(5): 153-159. (in Chinese)
 - [9] 姚金明,张腾飞,韩辉,等.基于 COMSOL Multiphysics 的电枢/轨道接触界面多物理场耦合与教学应用[J/OL].物理与工程,1-7.
YAO J M, ZHANG T F, HAN H, et al. Multiphysics coupling and teaching application of the armature/rail contact interface based on COMSOL Multiphysics[J/OL]. Physics and Engineering, 1-7. (in Chinese)
 - [10] 白云芑,梁莹,张震,等.黏滞液体落球实验的 COMSOL 仿真探索[J].物理与工程,2024,34(5):181-188.
BAI Y P, LIANG Y, ZHANG Z, et al. COMSOL simulation exploration of the falling ball experiment in viscous liquid[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(5): 181-188. (in Chinese)
 - [11] GRIFFITHS D J, SCHROETER D F. Introduction to quantum mechanics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.
 - [12] 曾谨言.量子力学卷 I [M].5版.北京:科学出版社,2013.
ZENG J Y. Quantum mechanics. volume I [M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese)
 - [13] PIACENTE G, SCHWEIGERT I V, BETOURAS J J, et al. Generic properties of a quasi-one-dimensional classical Wigner crystal[J]. Physical Review B, 2004, (4): 045324.
 - [14] SCHULZ H J. Wigner crystal in one dimension[J]. Physical Review Letters, 1993, (12): 1864.
 - [15] HOHENBERG P, KOHN W. Inhomogeneous electron gas[J]. Physical Review, 1964, (3B): B864.