

一维无限深势阱中多粒子问题的数值研究

谢惟楷¹ 余伟超²

(¹ 复旦大学物理学系, 上海 200433; ² 复旦大学微纳电子器件与量子计算机研究院, 上海 200433)

摘要 本文通过开发参数化维度映射策略, 利用 COMSOL Multiphysics 软件实现了对一维无限深势阱中多粒子量子系统的数值模拟研究, 通过建立粒子坐标与软件内置空间维度的非定域对应关系, 克服了高维量子系统的计算复杂性。通过对单电子、双电子和三电子系统的分析, 探讨了库仑相互作用对波函数分布和能级结构的影响。结果表明, 在双电子系统中, 库仑相互作用使波函数概率密度集中在电子距离较远的区域, 并显著提高了系统总能量。对于不同电子数目, 能量-宽度依赖关系(即基态能量随势阱宽度的变化规律)可以分为动能和势能两部分的贡献, 前者与势阱宽度的二次方成反比, 后者与势阱宽度的一次方成反比。通过引入有效幂次分析, 发现随着电子数增加, 能量与势阱宽度的关系趋于线性反比。该方法学创新显著降低了多体量子系统的教学演示难度, 研究结果为深入理解低维量子系统中电子间相互作用的影响提供了新的视角。

关键词 一维无限深势阱; 多电子量子系统; 库仑相互作用; 数值模拟; 能量-宽度依赖关系

NUMERICAL STUDY OF MULTI-PARTICLE SYSTEMS IN A ONE-DIMENSIONAL INFINITE POTENTIAL WELL

XIE Weikai¹ YU Weichao²

(¹ Department of Physics, Fudan University, Shanghai 200433;

² Institute for Nanoelectronic Devices and Quantum Computing, Fudan University, Shanghai 200433)

Abstract This paper presents a numerical simulation study of a multi-particle quantum system in a one-dimensional infinite potential well using COMSOL Multiphysics software by developing a parameterized dimension mapping strategy. By establishing a non-separable correspondence between particle coordinates and the built-in spatial dimensions of the software, the computational complexity of high-dimensional quantum systems is overcome. The analysis of single-electron, two-electron, and three-electron systems reveals the impact of Coulomb interactions on the wave function distribution and energy level structure. It is found that in the two-electron system, Coulomb interaction concentrates the probability density of the wave function in regions where the electrons are farther apart and significantly increases the total energy of the system. For different numbers of electrons, the energy-width dependence relationship (the rule of how the ground state energy changes with the width of the potential well)

收稿日期: 2025-02-28

基金项目: 国家自然科学基金(项目批准号 12204107)。

通信作者: 余伟超, wcyu@fudan.edu.cn。

引文格式: 谢惟楷, 余伟超. 一维无限深势阱中多粒子问题的数值研究[J]. 物理与工程, 2025, 35(4): 29-34, 59.

Cite this article: XIE W K, YU W C. Numerical study of multi-particle systems in a one-dimensional infinite potential well[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(4): 29-34, 59. (in Chinese)

can be divided into contributions from kinetic and potential energy. The former is inversely proportional to the square of the potential well width, while the latter is inversely proportional to the first power of the potential well width. By introducing effective power analysis, it is discovered that as the number of electrons increases, the relationship between energy and potential well width tends to be inversely proportional in a linear manner. This methodological innovation significantly reduces the difficulty of teaching demonstrations of multi-body quantum systems, and the research findings provide a new perspective for a deeper understanding of the effects of electron interactions in low-dimensional quantum systems.

Key words one-dimensional infinite potential well; multi-electron quantum system; Coulomb interaction; numerical simulation; energy-width dependence

一维无限深势阱模型是量子力学中一个经典且具有重要研究意义的模型。该模型通过简化三维问题,为理解量子力学中的基本概念和现象提供了一个理想的途径。特别是,它揭示了量子力学中一些重要的特性,如能级的离散性和波粒二象性。在这一模型中,粒子被限制在一个无限深的势阱内运动,而在势阱边缘,势能跃变为无穷大,限制了粒子的运动范围。这一特点使得一维(无限深)势阱成为研究量子力学教学和基础理论的重要工具,并且有相当多的研究都是以它为出发点^[1-2]。

然而,在研究双粒子和三粒子系统时,除了考虑无限深势阱的势能外,还必须引入电子之间的库仑相互作用^[3-4]。这种相互作用显著增加了系统的复杂性,但也为研究多体问题中的量子效应提供了新的视角,特别是在有限的条件下,粒子间的相互作用对系统性质的影响。需要指出的是,通常在单粒子情况中,解析求解相对较为容易;然而,涉及多粒子情况时(例如氢原子问题),解析求解往往需要大量的近似方法且难度较大。尽管在数值模拟上可以基于第一性原理等前沿的技术手段,但通常需要构建复杂的哈密顿矩阵并实施系统化的编程计算,这对量子力学本科教学实践而言存在显著的技术门槛。本研究将利用 COMSOL 对多电子系统进行研究。COMSOL 是一款基于有限元方法的数值计算软件,具有操作简便、拓展性强的优点,广泛应用在各个领域^[5-8],在教学领域也有广泛应用^[9-10]。本文首次将其拓展到量子多体问题研究,创新性地将多个粒子的一维运动自由度映射到软件内置的空间维度(例如, x 方向对应粒子 1, y 方向对应粒子 2, z 方向对应粒子 3, 依此类推),从而实现对多粒子系统的全关联

量子态建模。

在验证上述数值方法的正确性后,本研究旨在进一步拓展对一维多粒子系统的研究,重点探讨库仑相互作用对波函数特性的影响。本研究对一维双粒子和三粒子系统在无限深势阱中的行为进行深入分析,重点研究库仑相互作用如何影响系统的基态能量及其随势阱宽度的变化规律。通过精确的数值方法,揭示粒子相互作用对系统能级结构和空间分布的影响,为理解低维量子系统中的多体效应提供新的视角和理论支撑。

1 一维无限深势阱模型回顾

在进入一维双粒子和三粒子系统的研究之前先对单粒子模型进行一个简单的回顾。定态薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \quad (1)$$

其中, $\hbar$ 是约化普朗克常数, m 是粒子质量, E 是本征值能量。在一维无限深势阱中,势能 V 的表达式为

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ \infty, & \text{其他} \end{cases} \quad (2)$$

其中, a 为势阱宽度。通过求解式(1),可以得到一维无限深势阱的本征值表达式为

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (3)$$

其中, n 为正整数。为了验证这一理论结果的准确性,本研究使用 COMSOL 中的“系数形式 PDE”接口对一维单粒子在无限深势阱中的运动进行数值模拟。模拟结果显示的波函数图像如图 1 所示。本研究在模拟中通过使用 Dirichlet 边

界条件来实现深势阱两侧势能无限高的特点,从而准确模拟出粒子在势阱中的量子行为。

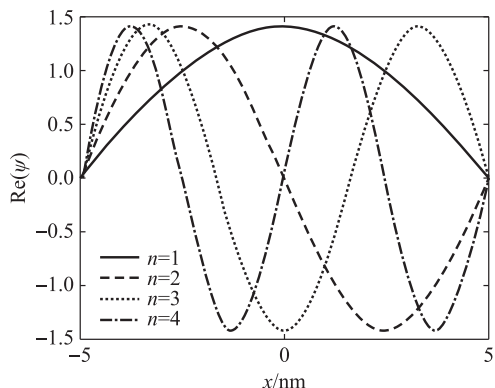


图1 一维无限深势阱 COMSOL 模拟结果(10nm 宽)

为了验证 COMSOL 的数值解,本研究将其与教科书^[11-12]中的理论结果进行了比较。简单起见,选取电子为考察对象。在计算中取 $a=10\text{nm}$, $\pi=3.14159$, $\hbar=1.054573\times 10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$, $m=m_e=9.10956\times 10^{-31}\text{kg}$,并且选择 n 值为 1 到 4。通过计算得到的能量本征值与 COMSOL 的数值结果进行了比对,发现两者非常接近,区别仅出现在小数点后第四位(误差不超过 0.01%),具体结果如表 1 所示。

表 1 教科书结果和 COMSOL 计算结果比较

n	教科书结果/J	COMSOL 计算结果/J
1	6.0246×10^{-22}	6.0247×10^{-22}
2	2.4098×10^{-21}	2.4099×10^{-21}
3	5.4221×10^{-21}	5.4222×10^{-21}
4	9.6393×10^{-21}	9.6395×10^{-21}

从上述对比中可以看出,COMSOL 的计算结果与理论值高度吻合,验证了其在求解量子力学问题中的精确性和可靠性。

2 一维双粒子在无限深势阱的运动

假设在一维无限深势阱中有两个电子(不考虑自旋),它们之间受到库仑相互作用。在这种情况下,双粒子定态薛定谔方程可以写成如下形式

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{d^2\psi}{dx_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{d^2\psi}{dx_2^2}+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|x_1-x_2|}\psi=E\psi \quad (4)$$

其中, x_1 和 x_2 分别表示两个电子的位置, $m_1=$

$m_2=m_e$ 是电子的质量, e 是电子的电荷, ϵ_0 是真空介电常数。设无限深势阱的宽度为 $a=10\text{nm}$, 附加 Dirichlet 边界条件,即在 $x_1=0, x_1=a$ 和 $x_2=0, x_2=a$ 处波函数 $\psi(x_1, x_2)$ 都为零。这反映了电子被限制在一个二维矩形势阱内,无法逃逸到外部。

由于上述薛定谔方程含有关于 $|x_1-x_2|$ 的库仑势项,粒子间的运动耦合在一起,使得方程无法通过分离变量的方法解析求解。为此,本文仍然使用 COMSOL,通过在数学接口中将式(4)转化成弱形式进行数值求解。

通过数值模拟,可获得系统的基态和第一个激发态的波函数分布,结果如图 2 所示。为了便于展示,本研究采用二维平面的方式绘制定态波函数的概率密度分布(等高线表示)和概率模平方分布(热力图表示),其中横轴为粒子 1 的位置 x_1 ,纵轴为粒子 2 的位置 x_2 。

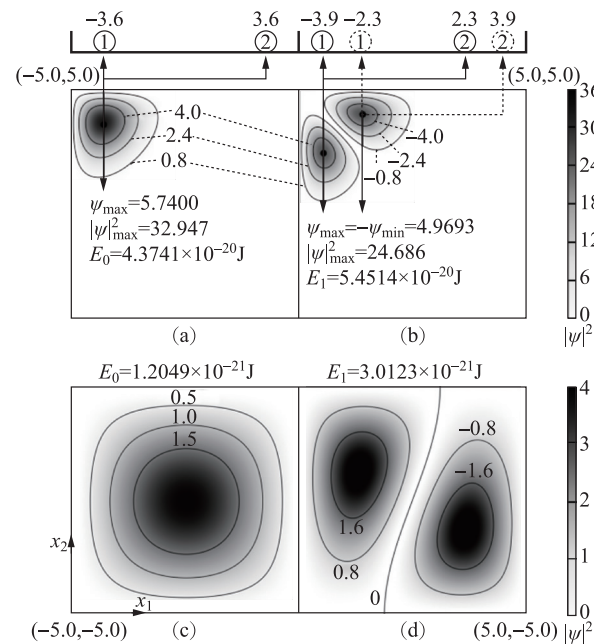


图2 双电子在一维无限深势阱中本征波函数 COMSOL 模拟结果(10nm 宽)

(a) 引入库仑势后定态波函数基态图像; (b) 引入库仑势后定态波函数第一激发态图像; (c) 不引入库仑势定态波函数基态图像; (d) 不引入库仑势定态波函数第一激发态图像

在不考虑库仑相互作用的情况下,即将库仑势项从薛定谔方程中去除,两个电子在一维无限深势阱中的运动是相互独立的。此时,系统的总波函数可以表示为两个单粒子波函数的乘积,能量为单粒子能级之和。由于没有相互作用,波函

数在 (x_1, x_2) 整个平面上弥散(等价于一个电子在二维无限深势阱的运动),体现了两个电子在势阱内的对称性(见图 2(c)(d))。这种情况下,系统的能级具有简并性,能量仅取决于单粒子的量子态。

引入库仑相互作用后,情况发生了显著变化。库仑势使得两个电子的运动相互耦合,导致系统的能级结构和波函数分布发生改变。数值模拟结果显示,每个本征态是二重简并的,波函数的非零区域集中在 (x_1, x_2) 平面的特定区域,例如左上角或右下角(图 2 中仅展示了左上角的情况)。这种波函数分布反映了两个电子由于相互排斥而倾向于远离彼此。

具体而言,对于基态,波函数的概率密度和模平方在 $(x_1, x_2) \approx (\pm 3.6\text{nm}, \pm 3.6\text{nm})$ 附近达到最大值。这意味着两个电子最有可能出现在彼此相距较远的位置,即一个靠近势阱的左侧,另一个靠近右侧。对于第一个激发态,波函数的概率密度和模平方的峰值出现在 $(x_1, x_2) \approx (\pm 3.9\text{nm}, \pm 2.3\text{nm})$ 以及 $(x_1, x_2) \approx (\pm 2.3\text{nm}, \pm 3.9\text{nm})$ 附近。这表明,在激发态下,电子仍然倾向于保持一定的相对距离,但与基态相比,它们的位置分布发生了变化;在最可能出现的位置,两个电子之间的距离相较于基态有所减小。

上述结果符合物理预期。由于电子具有相同的负电荷,库仑相互作用使它们彼此排斥,因此系统的波函数在 $|x_1 - x_2|$ 较大的区域具有更高的概率密度。与此同时,无限深势阱的边界条件限制了电子既不能无限远地离开对方,也不能无限接近势阱的边界。这种竞争关系导致了波函数在 (x_1, x_2) 平面上特定区域的集中。

此外,由于库仑势的存在,系统的总能量相对于无相互作用的情况显著提升。数值计算表明,本征能量升高了一个数量级。这是因为电子间的库仑势增加了系统的势能,使得总能量增大。

从量子力学的角度看,电子的这种分布反映了能量和空间分布之间的关系。基态对应于系统能量最低的状态,电子尽可能地远离彼此以降低库仑势能。而在激发态下,电子可能更接近一些,但这会增加系统的总能量。

值得注意的是,系统的对称性导致了能级的简并性。由于库仑势仅依赖于 $|x_1 - x_2|$,交换两个电子的位置(即 x_1 和 x_2 对调)并不改变系统的势能。因此,波函数可以是对称的或反对称的,导

致每个能级都是二重简并的。

3 不同电子数目下的能量-宽度依赖关系

3.1 变化分析及拟合

在探索一维无限深势阱中电子的基态能量随势阱宽度的变化时,考虑电子数目的影响是至关重要的。对于单电子系统,问题相对简单,因为没有电子之间的相互作用。但当系统中存在两个或更多电子时,需要考虑电子之间的库仑相互作用,而库仑相互作用又会反过来影响电子的动能,这需要深入分析动能和势能的贡献。从总能量角度出发,总能量显然包括电子的动能和库仑势能的贡献

$$E_{\text{total}} = E_{\text{kinetic}} + E_{\text{potential}} \quad (5)$$

其中,本研究假设动能部分仍然与 a^{-2} 成正比,因为电子的空间限制和动能的量子化条件没有改变。对于势能部分,可以预计两个电子的平均距离 $\langle |x_1 - x_2| \rangle$ 和 a 近似成正比,因此库仑势能平均值可以近似为

$$E_{\text{potential}} \propto \frac{e^2}{\langle |x_1 - x_2| \rangle} \propto \frac{e^2}{a} \quad (6)$$

这意味着库仑势能的贡献和势阱宽度 a 近似成反比。综上所述,本研究可以推测双电子在一维无限深势阱中的基态能量可以表示为动能和库仑势的两部分的贡献(其中 λ 和 μ 是待定系数)

$$E_0 = \lambda a^{-2} + \mu a^{-1} \quad (7)$$

同理,三个电子的情况仍可以分为动能部分和势能部分。对于一个电子的情况,显然 $\mu = 0$ 。为了方便讨论不同电子数的情况,本研究将式(6)重新写成

$$E_0(N, a) = \lambda(N) a^{-2} + \mu(N) a^{-1} \quad (8)$$

其中, N 表示电子数目, $E_0(N, a)$ 表示 N 个电子处在一维无限深势阱中的基态能量, $\lambda(N)$ 和 $\mu(N)$ 分别表示动能和势能贡献部分的系数,显然和电子数 N 有关。

本研究使用 COMSOL 对 $N = 1, 2, 3$ 的情况都进行了数值模拟,势阱宽度从 10nm 到 200nm ,每 10nm 取一个点,计算了 20 个势阱宽度下基态能量的结果。最后再用式(7)进行拟合,得到如表 2 和图 3 所示的结果。

拟合结果显示,对于单电子而言,在一维无限深势阱中的情况,其基态能量仅由动能贡献。动能

与势阱宽度 a 的二次方成反比, $\lambda(1) = 6.0247 \times 10^{-20} \text{ J} \cdot \text{nm}^2$, 数值上恰好等于 $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e}$; $\mu(1) = 0 \text{ J} \cdot \text{nm}$,

因为此时没有相互作用, 二者比值为 $\frac{\mu(1)}{\lambda(1)} = 0 \text{ nm}^{-1}$ 。

该拟合的拟合优度 $R^2 = 1.0000$, 残差几乎为 0, 和教科书结果吻合, 符合预期。所以对于 1 个电子的情况, 有

$$E_0(1, a) = 6.0247a^{-2} \times 10^{-20} \text{ J} \quad (9)$$

表 2 不同电子数下拟合表达式的参数

N	1	2	3
$\lambda / (\text{J} \cdot \text{nm}^2)$	6.0247×10^{-20}	1.0784×10^{-17}	3.0427×10^{-17}
$\mu / (\text{J} \cdot \text{nm})$	0	3.3278×10^{-20}	1.4655×10^{-19}
$\frac{\mu}{\lambda} / (\text{nm}^{-1})$	0	3.0858×10^{-2}	4.8164×10^{-2}

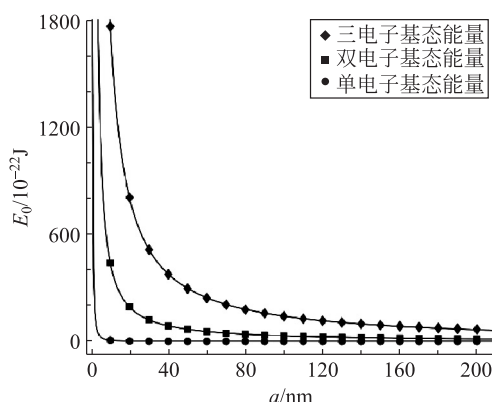


图 3 不同电子数目下基态能量随势阱宽度的变化曲线

当引入第二个电子时, 需要考虑电子之间的库仑相互作用, 这使得势能部分对总能量的贡献变得显著。动能部分仍然与 a^2 成反比, 而库仑势能与 a 成反比。通过数值模拟和拟合, 得到了双电子系统的基态能量表达式

$$E_0(2, a) = (1.0784a^{-2} \times 10^{-17} + 3.3278a^{-1} \times 10^{-19}) \text{ J} \quad (10)$$

其中, $\lambda(2) = 1.0784 \times 10^{-17} \text{ J} \cdot \text{nm}^2$, $\mu(2) = 3.3278 \times 10^{-19} \text{ J} \cdot \text{nm}$, 二者的比值为 $\frac{\mu(2)}{\lambda(2)} =$

$3.0858 \times 10^{-2} \text{ nm}^{-1}$; 拟合优度为 $R^2 = 0.9999$, 说明式(7)能够非常好刻画能量随势阱宽度变化的特征。

在三电子系统中, 由于电子数目的增加, 库仑相互作用变得更为复杂和显著。通过数值模拟和拟合, 得到了三电子系统的基态能量表达式

$$E_0(3, a) = (3.0427a^{-2} \times 10^{-17} + 1.4655a^{-1} \times 10^{-18}) \text{ J} \quad (11)$$

其中, $\lambda(3) = 3.0427 \times 10^{-17} \text{ J} \cdot \text{nm}^2$, $\mu(3) = 1.4655 \times 10^{-18} \text{ J} \cdot \text{nm}$, 二者比值为 $\frac{\mu(3)}{\lambda(3)} = 4.8164 \times$

10^{-2} nm^{-1} , 势能的贡献相较于双电子系统更加显著, 这是合理的, 因为三个电子之间的相互作用更为复杂, 导致势能的影响更为明显。此时, 拟合优度 $R^2 = 0.9999$, 表明式(7)仍然能够准确地刻画基态能量随势阱宽度变化的特征。

3.2 有效幂次

为了深入研究基态能量 E_0 随势阱宽度 a 的变化规律, 本研究采用有效幂次的方法进行分析。具体而言, 使用以下线性关系式

$$\ln E_0 = -m \ln a + c \quad (12)$$

其中, m 为有效幂次, c 为常数项。通过对不同电子数 $N=1, 2, 3$ 的数据进行线性拟合, 可得到 $\ln E_0$ 对 $\ln a$ 的拟合直线, 拟合结果如图 4 和表 3 所示。

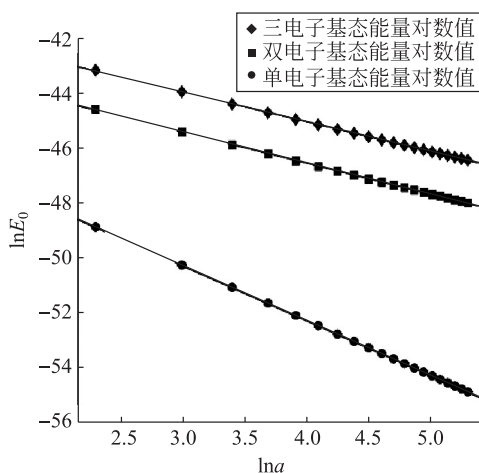


图 4 基态能量对数值随势阱宽度对数值的变化曲线

表 3 不同电子数下的有效幂次

N	1	2	3
m	2.0000	1.1255	1.0848
R^2	1.0000	0.9997	0.9999

从图 4 可以看出, 引入库仑势后, 基态能量 E_0 对参数 a 的依赖关系发生了显著变化。具体而言:

(1) 当电子数 $N=1$ 时, 拟合得到的有效幂次为 $m=2.0000$, 拟合优度 $R^2=1.0000$ 。这表明势能与参数 a 存在严格的二次反比关系, 即 $E_0 \propto a^{-2}$ 。这符合单电子系统中, 库仑势能与距离平方

成反比的理论预期。

(2) 当电子数 $N=2$ 时,有效幂次直接降至 $m=1.1255$,拟合优度 $R^2=0.9997$ 。有效幂次的剧烈变化反映了电子-电子相互作用的影响,电子间的排斥力使得总基态能量与势阱宽度的依赖关系发生显著的改变。

(3) 当电子数 $N=3$ 时,有效幂次进一步减小到 $m=1.0848$, $R^2=0.9999$ 。幂次更接近于-1,但减小的幅度相比从1个电子到2个电子并不明显。但这仍然能够表明随着系统中电子数的增加,电子间的相互作用和屏蔽效应会更加显著。

此外,从拟合效果来看,直接使用式(7)对原始数据进行拟合比对数转换后的数据进行拟合效果更好。这可能是对数转换会引入额外的误差或改变数据的分布特性,从而影响拟合的准确性和稳定性。直接拟合可以更真实地反映数据的内在关系。

基于上述分析,本研究可以推测:随着电子数 N 的增加,有效幂次 m 将逐渐趋近于-1。这表明,在多电子系统中,基态能量 E_0 与参数 a 之间的关系将趋于线性反比,即 $E_0 \propto a^{-1}$ 。这一结果与多体物理中的相关理论结论是一致的;在强关联极限下,例如一维 Wigner 晶体^[13-14],库仑势能主导了系统的能量,其标度行为表现为 $E_0 \propto a^{-1}$ 。此外,通过变分法^[15]的分析,也证明了在相互作用主导的情况下,多体系统的能量遵循 a^{-1} 的标度关系。

4 结语

本文通过数值模拟深入探讨了在一维无限深势阱中引入库仑相互作用后,双电子系统的波函数和能级结构所发生的显著变化。电子间的相互排斥作用迫使它们在空间中尽可能远离彼此,从而使得波函数的概率密度在这些远离区域达到最大值。库仑相互作用不仅提高了系统的总能量,还显著改变了电子的空间分布,突显了相互作用在量子系统中对物理性质的关键作用。研究结果为深入理解低维量子系统中电子间相互作用的影响提供了有力的支持,并有望为未来多电子系统的性质研究奠定了基础,通过开发参数化维度映射策略,将多体系统的粒子坐标与软件空间维度建立非定域对应关系,有效规避了传统数值方法中的高维张量运算瓶颈。

此外,本文还进一步分析了不同电子数目下

基态能量随势阱宽度的变化规律。对于单电子系统,基态能量主要由动能主导;而对于多电子系统,库仑相互作用逐渐成为决定总能量的关键因素,且随着电子数目的增加,库仑效应对能量的影响变得更加显著。这一发现不仅验证了现有理论模型的有效性,也为理解多电子系统中的相互作用提供了新的视角和思路。未来的研究可以进一步扩展到更高维度或更复杂的势阱模型,探讨更多电子和相互作用形式对系统性质的影响。这些发现对量子力学教学实践具有启示意义:相较于前沿的量子多体计算方法,本文发展的数值建模方案显著降低了多粒子系统的教学演示门槛,便于学生亲手操作并建立直观的物理图像。

参 考 文 献

- [1] 顾卓成,刘昊迪,衣学喜. 动边界一维无限深势阱中粒子的演化[J]. 物理与工程, 2023, 33(1): 27-34.
GU Z C, LIU H D, YI X X. Evolution of particles in a one-dimensional infinite potential well with moving boundaries [J]. Physics and Engineering, 2023, 33(1): 27-34. (in Chinese)
- [2] 曾嘉钟,曾孝奇. 一维双方势垒单势阱模型的共振隧穿条件研究[J]. 大学物理, 2024, (3): 5-10.
ZENG J Z, ZENG X Q. Study on resonance tunneling conditions of one-dimensional double-barrier single-well model [J]. College Physics, 2024, (3): 5-10. (in Chinese)
- [3] SALTER E A, TRUCKS G W, CYPHERT D S. Two charged particles in a one-dimensional well [J]. American Journal of Physics, 2001, (2): 120-124.
- [4] DIESTLER D J, MCKOY V. Quantum mechanics of one-dimensional two-particle models. Electrons interacting in an infinite square well [J]. The Journal of Chemical Physics, 1967, (2): 454-467.
- [5] 付济超. 基于亚波长结构的特异共振腔的若干研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2020.
FU J C. Several studies on specific resonant cavities based on sub-wavelength structures [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2020. (in Chinese)
- [6] 汪昱. 光声晶体微腔中光子-声子相互作用的研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2024.
WANG Y. Study on photon-phonon interaction in opto-acoustic crystal microcavities [D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2024. (in Chinese)
- [7] 李洋洋,李帅威,奥骁琳,等. 基于新型水泵流量影响因素的探究[J]. 物理与工程, 2025, 35(1): 239-247.
LI Y Y, LI S W, AO X L, et al. Research on influencing factors of flow rate of new type pump [J]. Physics and Engineering, 2025, 35(1): 239-247. (in Chinese)

(下转第 59 页)

及陈述结果的全过程,为学生的科研素养培养提供启蒙教育解决方案。

参 考 文 献

- [1] 李晓鹏,曹雨露,蔡惠萍,等.宽波束双频同轴共口径高精度 GNSS 天线设计[J].微波学报,2024,40(5):91-96.
LI X P, CAO Y L, CAI H P, et al. Design of dual-band coaxial aperture-shared high-precision GNSS antenna with wide beamwidth[J]. Journal of Microwaves, 2024, 40(5): 91-96. (in Chinese)
 - [2] AHMAD A, CHOI D, ULAH S. A compact two elements MIMO antenna for 5G communication[J]. Science Report, 2022, 12: 3608.
 - [3] XU R, CHEN Z N. A compact beamsteering metasurface lens array antenna with low-cost phased array[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2021, 69(4): 1992-2002.
 - [4] 刘阳,周海京,郑宇腾,等.高性能计算在目标电磁散射特性分析中的应用[J].电波科学学报,2019,34(1):3-11.
LIU Y, ZHOU H J, ZHENG Y T, et al. Applications of high performance computing in analyzing the electromagnetic scattering characteristics of targets[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2019, 34(1): 3-11. (in Chinese)
 - [5] 肖培,李佳维,张超,等.双层屏蔽腔内线缆负载电磁耦合的 EMT 分析方法[J].微波学报,2021,37(5):52-57.
XIAO P, LI J W, ZHANG C, et al. An EMT analysis method for calculating the electromagnetic coupling of transmission line inside a double-layer cavity[J]. Journal of Microwaves, 2021, 37(5): 52-57. (in Chinese)
 - [6] 于少帅,任新成,朱小敏,等.土壤表面与运动目标复合电磁散射的矩量法研究[J].微波学报,2024,40(1):60-66.
YU S S, REN X C, ZHU X M, et al. Study on composite electromagnetic scattering from a moving target above the soil surface by the method of moment[J]. Journal of Microwaves, 2024, 40(1): 60-66. (in Chinese)
 - [7] XIAO L, FIANDACA G, ZHANG B, et al. Fast 2.5D and 3D inversion of transient electromagnetic surveys using the octree-based finite-element method[J]. Geophysics, 2022, 87(4): E267-E277.
 - [8] CHEN W, GUO L X, LI J T. Research on the FDTD method of scattering effects of obliquely incident electromagnetic waves in time-varying plasma sheath on collision and plasma frequencies[J]. Physics of plasmas, 2017, 24(4): 042102.
 - [9] 刘健,郭元龙,张庆一,等.时域有限差分方法分析水下目标散射电场分布[J].实验室研究与探索,2023,42(10):123-129.
LIU J, GUO Y, ZHANG Q, et al. Analysis of scattering electric field distribution of underwater target by time-domain finite-difference method[J]. Research and Exploration in Laboratory, 2023, 42(10): 123-129. (in Chinese)
 - [10] 陈伟军,龙世瑜,刘如军.电磁场课程设计中新的数值计算方法探索[J].实验科学与技术,2017,15(6):76-79.
CHEN W J, LONG S Y, LIU R J. Exploration of new numerical methods in the course design of electromagnetic field[J]. Experiment Science and Technology, 2017, 15(6): 76-79. (in Chinese)
 - [11] 葛德彪,闫玉波.电磁波时域有限差分方法[M].3版.西安:西安电子科技大学出版社,2011.
GE D B, YAN Y B. Finite-difference Time-domain method for electromagnetic waves[M]. 3th ed. Xi'an: Xi'an University of Electronic Science and Technology Press, 2011. (in Chinese)
- (上接第 34 页)
- [8] 刘婷,熊泓媛,黄映洲,等.开发基于亥姆霍兹谐振腔的通风吸声超材料创新性实验[J].物理与工程,2024,34(5):153-159.
LIU T, XIONG H Y, HUANG Y Z, et al. Development of an innovative experiment on ventilated sound-absorbing metamaterials based on Helmholtz resonators[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(5): 153-159. (in Chinese)
 - [9] 姚金明,张腾飞,韩辉,等.基于 COMSOL Multiphysics 的电枢/轨道接触界面多物理场耦合与教学应用[J/OL].物理与工程,1-7.
YAO J M, ZHANG T F, HAN H, et al. Multiphysics coupling and teaching application of the armature/rail contact interface based on COMSOL Multiphysics[J/OL]. Physics and Engineering, 1-7. (in Chinese)
 - [10] 白云芑,梁莹,张震,等.黏滞液体落球实验的 COMSOL 仿真探索[J].物理与工程,2024,34(5):181-188.
BAI Y P, LIANG Y, ZHANG Z, et al. COMSOL simulation exploration of the falling ball experiment in viscous liquid[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(5): 181-188. (in Chinese)
 - [11] GRIFFITHS D J, SCHROETER D F. Introduction to quantum mechanics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.
 - [12] 曾谨言.量子力学卷 I [M].5版.北京:科学出版社,2013.
ZENG J Y. Quantum mechanics. volume I [M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese)
 - [13] PIACENTE G, SCHWEIGERT I V, BETOURAS J J, et al. Generic properties of a quasi-one-dimensional classical Wigner crystal[J]. Physical Review B, 2004, (4): 045324.
 - [14] SCHULZ H J. Wigner crystal in one dimension[J]. Physical Review Letters, 1993, (12): 1864.
 - [15] HOHENBERG P, KOHN W. Inhomogeneous electron gas[J]. Physical Review, 1964, (3B): B864.