

巧用质心概念证明平行轴定理

刘玉颖 赵 云 李春燕 王学进 何志巍

(中国农业大学理学院应用物理系, 北京 100083)

摘 要 大学物理教学中, 关于转动惯量的平行轴定理具有很重要的应用价值。它能够拓展人们关于转动惯量的认识, 在理论计算和工程技术中均有重要的应用。本文中我们利用质心概念通过几种不同的方法巧妙地证明平行轴定理, 几种方法难易程度不同, 当质心的位置位于坐标原点时, 学生更容易理解平行轴定理的推导过程。同时利用质点系动能定理推导也是一种很新颖的方法。

关键词 质心; 转动惯量; 平行轴定理

AN INGENIOUS PROOF OF THE PARALLEL AXIS THEOREM USING THE CONCEPT OF CENTER OF MASS

LIU Yuying ZHAO Yun LI Chunyan WANG Xuejin HE Zhiwei

(Department of Applied Physics, College of Science, China Agricultural University, Beijing 100083)

Abstract In university physics education, the parallel axis theorem for moment of inertia holds significant practical value. It extends the understanding of moment of inertia and is widely applied in theoretical calculations and engineering technology. In this paper, we present an ingenious proof of the parallel axis theorem using the concept of center of mass through several distinct methods of varying difficulty. When the center of mass is positioned at the coordinate origin, students find the derivation of the parallel axis theorem more comprehensible. Additionally, deriving the theorem using the kinetic energy theorem of a system of particles is also a novel approach.

Key words center of mass; rotational inertia; the parallel axis theorem

刚体转动惯量与转轴位置有关, 计算刚体关于任意转轴的转动惯量非常复杂, 甚至在分析具有高度对称性的物体时, 也存在此情况。幸运的是, 应用重要的平行轴定理可以简化和拓展转动惯量的计算, 该定理反映了刚体通过质心轴和平行于质心轴的另一转轴(图 1)的转动惯量之间的定量关系。如果刚体关于质心轴的转动惯量为 I_{CM} , 刚体关于平行质心轴的转轴的转动惯量为 I , M 为刚体的总质量, d 为两个转轴的距离, 则平行轴定理可表述为

$$I = I_{CM} + Md^2$$

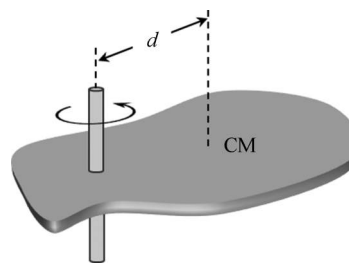


图 1 刚体绕平行于质心轴的转轴转动

在大多数《大学物理学》教材中^[1-3], 直接给出平行轴定理结论, 并未做具体的证明推导, 笔者认

收稿日期: 2024-08-31

基金项目: 北京高等教育本科教学改革创新项目(202010019004); 农林专业理科强基 3+1 核心能力体系研究; 教育部高等学校大学物理课程教学指导委员会教学研究课题: 面向大中学生物理科学素养和科普教学的研究与实践(WX202419)。

通信作者: 何志巍, hezw@cau.edu.cn。

引文格式: 刘玉颖, 赵云, 李春燕, 等. 巧用质心概念证明平行轴定理[J]. 物理与工程, 2025, 35(4): 25-28.

Cite this article: LIU Y Y, ZHAO Y, LI C Y, et al. An ingenious proof of the parallel axis theorem using the concept of center of mass [J]. Physics and Engineering, 2025, 35(4): 25-28. (in Chinese)

为教学上既要授人以鱼,又要授人以渔;对于平行轴定理的教学,给出具体详细的推导过程有利于学生深刻理解该规律,且能提升知识掌握的深度与高度。近年来,研究者从实验设计和理论推导研究平行轴定理及其正确应用^[4-7],例如改进转动惯量平行轴定理验证实验等^[7];以及由两个转动定律导出平行轴定理^[4],但对此理论推导过程学生理解有些困难;基于此,本文给出4种简便方法详细推导关于转动惯量的平行轴定理,以飨读者。

刚体可以具有多个转动惯量,实际上,它可以有无数个转动惯量,因为它可以有无数个旋转轴,平行轴定理表达了刚体关于质心轴和通过另一平行转轴的转动惯量之间的定量关系。

为了得出平行轴定理,假设匀质刚体绕某一定轴(z 轴)旋转,转动惯量不依赖于沿 z 轴的质量分布,例如一个圆柱体与圆盘相对其中心转轴的转动惯量与厚度无关,所以在推导过程中我们将三维匀质刚体简化为二维平面物体来分析,想象三维匀质刚体所有的质量元沿平行于 z 轴的方向收缩运动,直到质量分布于 xy 平面内。

1 方法一:利用质点系动能定理推导平行轴定理

由质点系动能定理可知:一个由大量质点组成的质点系的动能包括两项动能之和:第一项动能与质心的平动相联系,即 $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$,第二项动能与各质点相对质心运动的动能有关,即 $\frac{1}{2}\sum m_i u_i^2$,其中 u_i 是第 i 个质点相对于质心的速度。所以质点系的总动能可表示为

$$E_k = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i u_i^2 = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + E_{\text{krel}} \quad (1)$$

其中, M 为质点系的总质量, E_{krel} 为各质点相对于质心的动能。

假设物体绕某一定轴旋转(如图2所示),转动的角速度为 ω ,该定轴与质心轴平行且相距为 d ,该物体的动能为 $\frac{1}{2}I\omega^2$, I 为该物体相对于该定轴的转动惯量。 I_{CM} 为该物体相对于质心轴的转动惯量。根据质点系的动能定理,该物体总的动能可表示为

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \quad (2)$$

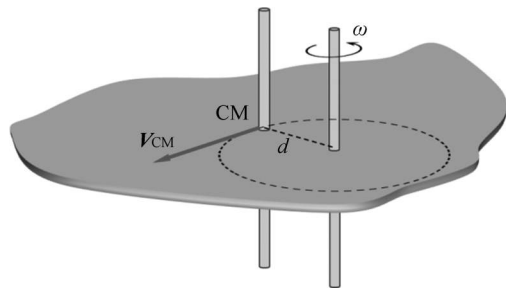


图2 刚体绕平行于质心轴的转轴以角速度 ω 转动

质心作半径为 d 的圆周运动,质心运动的线速度

$$v_{CM} = \omega d \quad (3)$$

将式(3)代入式(2),得

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Md^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \quad (4)$$

式(4)化简为

$$I = Md^2 + I_{CM} \quad (5)$$

从而证明了转动惯量的平行轴定理^[8]。由平行轴定理的表达式可知,定轴距离质心越近,刚体关于该轴的转动惯量越小,通过质心轴的转动惯量最小。

2 方法二:利用转动惯量和质心位置的定义推导平行轴定理

我们仍考虑任意薄盘状的刚体,不计其厚度。假设该刚体绕转轴 z 轴(过 O 点)旋转,建立如图3所示的坐标系,过 O 点建立直角坐标系 xyz ,质心的位置坐标为 $x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}=0$,在刚体上任取一质量元 dm ,其坐标为 $(x, y, z=0)$;过质心建立另一直角坐标系 $x'y'z'$ 。

在刚体上任取一小质元 dm ,下面我们考虑所有小质元 dm 关于 z 轴的转动惯量

$$I = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm \quad (6)$$

在坐标系 xyz 和 $x'y'z'$ 中,质量元 dm 的坐标存在以下定量变换关系^[9]

$$x = x' + x_{CM}, \quad y = y' + y_{CM}, \quad z = z' = 0$$

式(6)可以表示为

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm = \int (x' + x_{CM})^2 + (y' + y_{CM})^2 dm \\ I &= \int [(x')^2 + (y')^2] dm + 2x_{CM} \int x' dm + \\ &\quad 2y_{CM} \int y' dm + (x_{CM}^2 + y_{CM}^2) \int dm \end{aligned} \quad (7)$$

由式(7)可知,第一项为刚体相对于质心轴的转动

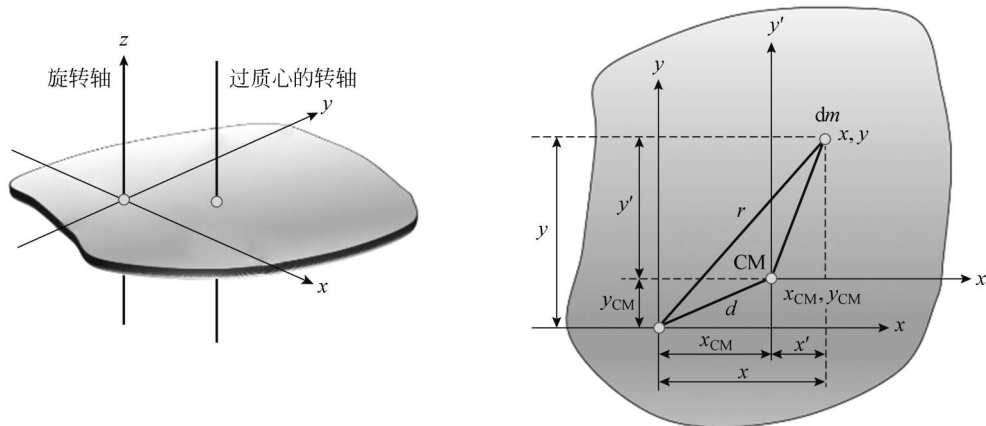


图3 质心到O点距离(即两平行轴间的距离)为d

惯量 I_{CM} , 第二项和第三项均为 0, 因为

$$\int x' dm = Mx'_{CM}, \quad \int y' dm = My'_{CM}$$

在 $x'y'z'$ 坐标系中, 质心坐标 x'_{CM} 、 y'_{CM} 均为 0; 第四项

$$d^2 = x_{CM}^2 + y_{CM}^2$$

所以式(7)可简化为

$$I = I_{CM} + Md^2$$

平行轴定理得证。

3 方法三: 基于转动惯量和质心位置的定义更简便的推导

在方法二中, 我们利用转动惯量和质心位置的定义, 分别建立了两组坐标系, 得到了平行轴定理, 基于此方法, 在推导过程中我们还可以进一步简化推导过程, 便于学生快速理解。为了证明此定理, 我们假设两个转轴均平行于 z 轴, 一个转轴通过质心, 另一转轴通过 P 点(如图 4 所示), 我们仍考虑薄片状物体位于 xy 平面内, 此时我们建立坐标系 xyz , 其原点位于质心处, $x_{CM} = y_{CM} = z_{CM} = 0$, P 点坐标为 $(a, b, 0)$, 通过 P 点的转轴与质心轴间的距离为 $d^{[10]}$

$$d^2 = a^2 + b^2$$

在薄片状刚体上任取一质量元 dm , 其坐标为 $(x, y, z=0)$, 刚体关于过 P 点的转轴和通过质心轴的转动惯量分别为

$$I_p = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2] dm \quad (8)$$

$$I_{CM} = \int (x^2 + y^2) dm \quad (9)$$

由式(8)展开可得

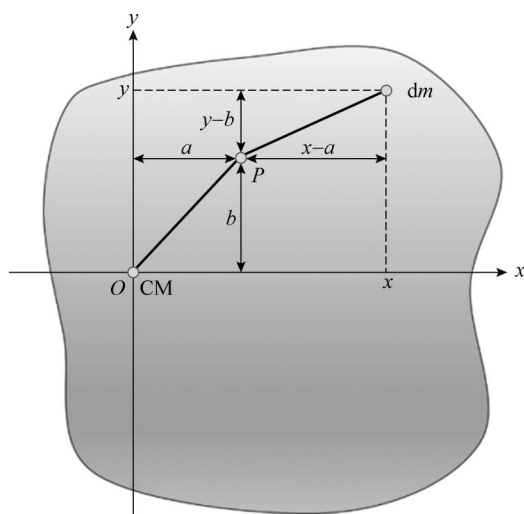


图4 任意薄盘状刚体, 质心(O点)距离P点(两平行轴间的距离)为d

$$I_p = \int (x^2 + y^2) dm - 2a \int x dm - 2b \int y dm + (a^2 + b^2) \int dm \quad (10)$$

由式(10)可知, 第一项为刚体相对于质心轴的转动惯量 I_{CM} , 第二项和第三项与质心位置坐标成正比, 由于质心坐标 x, y 均为 0, 所以第二项和第三项均为 0; 最后一项为 Md^2 ; 从而我们证明了平行轴定理。比较方法二和方法三, 方法三更简单易懂, 首先它只需建立一个坐标系, 质心与原点重合时, 由于质心的坐标为 0, 所以简化了公式(10)中间两项的推导。

4 方法四: 基于转动惯量和质心位置的定义另一种推导

我们假设两个转轴均平行于 z 轴, 一个转轴

通过质心 O , 另一转轴通过 P 点(如图 5 所示), 基于方法三, 建立坐标系(如图 5 所示), 选 P 点为坐标原点处, 质心坐标为 $(a, b, z=0)$, 在此情况下, 平行轴定理又如何推导呢?

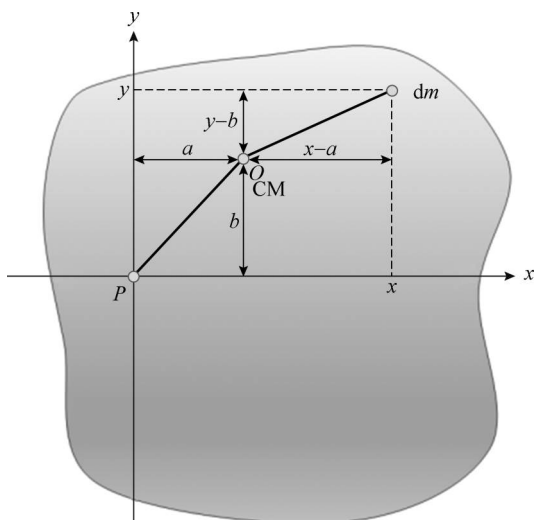


图 5 任意薄盘状刚体, 质心 O 点距离 P 点 (两平行轴间的距离) 为 d

在薄片状刚体上任取一质量元 dm , 其坐标为 $(x, y, z=0)$, 刚体关于过 P 点的转轴和通过质心轴 O 的转动惯量分别为

$$I_P = \int (x^2 + y^2) dm \quad (11)$$

$$I_{CM} = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2] dm \quad (12)$$

由式(12)可得

$$I_{CM} = \int (x^2 + y^2) dm - 2a \int x dm - 2b \int y dm + (a^2 + b^2) \int dm \quad (13)$$

根据质心位置定义

$$\int x dm = Mx_{CM} = Ma, \quad \int y dm = My_{CM} = Mb \quad (14)$$

式(13)可化简为

$$I_{CM} = I_P - 2Ma^2 - 2Mb^2 + M(a^2 + b^2) = I_P - M(a^2 + b^2) \quad (15)$$

即

$$I_P = I_{CM} + M(a^2 + b^2) = I_{CM} + Md^2$$

平行轴定理得证。

5 结语

本文中, 我们利用质心概念探讨并给出了关

于转动惯量的平行轴定理几种简单的证明方法。教学实践表明: 适当引入平行轴定理的证明过程, 从不同角度进行分析, 有助于学生深化对转动惯量和质心概念的理解与应用, 几种证明方法均简明易懂, 能有效克服学生的畏难情绪, 并且通过该定理的证明探究物理概念之间的内在联系, 是对大学物理教学的有益补充。

参 考 文 献

- [1] 刘克哲. 物理学[M]. 4版. 北京: 高等教育出版, 2005: 97.
LIU K Z. Physics[M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2005: 97. (in Chinese)
- [2] 马文蔚. 物理学[M]. 6版. 北京: 高等教育出版, 2014: 115.
MA W W. Physics[M]. 6th ed. Beijing: Higher Education Press, 2014: 115. (in Chinese)
- [3] 程守洵, 江之永. 普通物理学[M]. 7版. 北京: 高等教育出版, 2016: 121.
CHENG S Z, JIANG Z Y. General physics[M]. 7th ed. Beijing: Higher Education Press, 2016: 121. (in Chinese)
- [4] 王凤林. 由两个转动定律导出了平行轴定理和柯尼希定理[J]. 大学物理, 2006, 25(9): 17-17.
WANG F L. Parallel axis theorem and Konig theorem deduced from the two laws of rotation[J]. College Physics, 2006, 25(9): 17-17. (in Chinese)
- [5] 俞琛. 平行轴定理的正确运用[J]. 大学物理, 1988, 1(2): 15-15.
YU C. The correct application of the parallel axis theorem[J]. College Physics, 1988, 1(2): 15-15. (in Chinese)
- [6] 邱菊, 刘宇星, 孔炎. 用扭摆验证转动惯量平行轴定理的新方法[J]. 大学物理, 2006, 25(9): 37-38, 58.
QIU J, LIU Y X, KONG Y. A new method using torsion pendulum to verify the parallel axis theorem[J]. College Physics, 2006, 25(9): 37-38, 58. (in Chinese)
- [7] 闫敏, 戴语琴, 袁俊, 等. 转动惯量平行轴定理验证实验的改进方案[J]. 大学物理, 2020, 39(5): 66-69.
YAN M, DAI Y Q, YUAN J, et al. An improvement to the verification of parallel axis theorem for moment of inertia[J]. College Physics, 2020, 39(5): 66-69. (in Chinese)
- [8] TIPLER P A, MOSCA G. Physics for scientists and engineers with modern physics[M]. 6th ed. FREEMAN W H and Company, 2008: 297-298.
- [9] SERWAY R A, JEWETT J W Jr. Physics for scientists and engineers with modern physics[M]. 8th ed. Cengage Learning, 2010: 288-289.
- [10] YOUNG H D, FREEDMAN R A. University physics with modern physics[M]. 15th ed. Pearson Education Limited, 2020: 315-316.