

质点运动学中元位移的大小、位矢大小的微分及元路程间关系

蔡兴民 叶 凡

(深圳大学物理与光电工程学院, 广东 深圳 518060)

摘 要 在质点运动学中,经常涉及元位移、元位移的大小、位矢大小的微分及元路程等几个物理量,物理教材虽以图像并结合极限推理的方式展示了这些物理量间的关系,但不少学生仍觉得难以理解,并可能对这些物理量间的关系有所质疑。本论文以直角坐标系为基础对位矢大小的微分进行了直接推导及计算,从数学上或微分运算上揭示了这些物理量之间的关系,从而避开了采用极限及推理的方式给学生带来的困扰。本文为讲述这些物理量之间的关系提供了一种新的方法,有助于加深学生对这些物理量及相互关系的理解。

关键词 元位移;位矢大小的微分;元路程;图像;微分运算

RELATIONSHIP BETWEEN THE MAGNITUDE OF ELEMENT DISPLACEMENT, THE ELEMENT CHANGE OF THE MAGNITUDE OF THE POSITION VECTOR, AND THE ELEMENT PATH IN PARTICLE KINEMATICS

CAI Xingmin YE Fan

(College of Physics and Optoelectronic Engineering, Shenzhen University, Shenzhen, Guangdong 518060)

Abstract In particle kinematics, several physical quantities such as element displacement, the magnitude of element displacement, the element change of the magnitude of the position vector, and element distance are often involved. Although physics textbooks present the relationships between these physical quantities through images and limit reasoning, many students still find it difficult to understand and may question the relationships between these physical quantities. This paper directly derives and calculates the differential of vector size based on the Cartesian coordinate system, revealing the relationship between these physical quantities mathematically or through differential operations, thus avoiding the difficulties caused to students by using limit and inference methods. This paper provides a new method for discussing the relationships between these physical quantities, which helps deepen students' understanding of these quantities and their interrelationships.

Key words element displacement; the element change of the magnitude of the position vector; the element distance; picture; differential calculation

收稿日期: 2025-03-03

基金项目: 深圳大学教学改革研究项目(JG2023074)。

通信作者: 叶凡, yefan@szu.edu.cn。

引文格式: 蔡兴民, 叶凡. 质点运动学中元位移的大小、位矢大小的微分及元路程间关系[J]. 物理与工程, 2025, 35(4): 21-24.

Cite this article: CAI X M, YE F. Relationship between the magnitude of element displacement, the element change of the magnitude of the position vector, and the element path in particle kinematics[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(4): 21-24. (in Chinese)

在坐标原点为 O 的直角坐标系中,如图 1 所示,以字母加箭头的方式表示矢量,设某时刻质点在 P 点, P 点的坐标为 (x, y, z) , $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴、 y 轴及 z 轴夹角分别为 α, β 及 γ ,则 P 点的位置矢量 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 。相应地,元位移为 $d\mathbf{r}$,位矢大小的微分则为 dr ,设经历的路程用 s 表示,则元路程为 ds 。教材都是采用图示结合极限推理来展示三者的关系^[1-21],但这部分内容仍是学生容易混淆及难以理解的。本文首先采用图示来展示三者的关系;其次,利用微分运算直接推导了位矢大小的微分 dr 的表示式,所得结果与用图像展示所得的结果相同;第三,将所得结果应用到直线运动和圆周运动中,通过特例进一步揭示其关系;最后,将所得结果用到了万有引力做功^[1-6]及库仑力^[7-21]做功的计算当中。

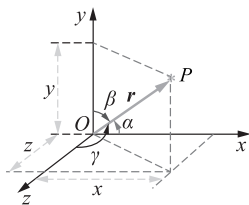


图1 直角坐标系中的位置矢量

1 三个参数的图像展示

首先采用图像的方法^[1-6,14-21]来分析及推导元位移 $d\mathbf{r}$ 、元路程 ds 及位矢大小的微分 dr 等三个参数的关系。如图 2 所示,假设质点由 P_1 经图中的曲线移动到 P_2 ,则该时间段内,由起点 P_1 指向终点 P_2 的矢量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 即为位移 $\Delta\mathbf{r}$ 、起点 P_1 到终点 P_2 所经过的路径长度即为该段时间内的路程 Δs 。以 O 为圆心且以 OP_1 的大小为半径作圆弧交 OP_2 于点 A ,以 O 为圆心且以 OP_2 的大小为半径作圆弧交 OP_1 的延长线于点 B ,则 $AP_2 = P_1B = r_2 - r_1 = \Delta r$ 。设在 P_1 处位矢 $\mathbf{r}_1$ 与位移 $\Delta\mathbf{r}$ 的夹角为 θ 。当由 P_1 到 P_2 的时间趋近于零时, P_2 和 P_1 趋近于重合,此时位移 $\Delta\mathbf{r}$ 、位矢大小的增量 Δr 、及路程 Δs 相应地变为元位移 $d\mathbf{r}$ 、位矢大小的微分 dr 及元路程 ds 。当由 P_1 到 P_2 的时间趋近于零时, OP_1 和 OP_2 间的夹角趋近于零,则在顶点为 O 的等腰三角形 BOP_2 中,两个底角 $\angle OBP_2$ 和 $\angle OP_2B$ 都趋近于 90° ,于是,在三角

型 P_2BP_1 中, $\angle P_2BP_1$ 趋近于 90° ,线段 P_1B 的长度等于线段 P_1P_2 的长度乘以 $\cos\theta$,也即 $dr = \cos\theta|\Delta\mathbf{r}|$ 。此外,可以推断的是,由 P_1 到 P_2 的时间趋近于零时,元位移的大小 $|d\mathbf{r}|$ 与元路程 ds 相等。因此,可以得到 $dr = \cos\theta|\Delta\mathbf{r}| = \cos\theta ds$,其中 θ 为任意时刻位移与速度(或元位移)间的夹角。

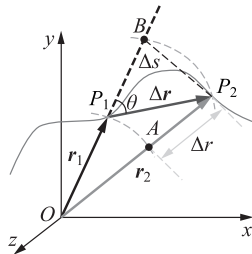


图2 直角坐标系中位移 $\Delta\mathbf{r}$ 、路程 Δs 及位矢大小的增量 Δr 。当 P_1 到 P_2 的时间趋近于零时, P_2 与 P_1 趋近于重合,位移 $\Delta\mathbf{r}$ 、路程 Δs 及位矢大小的增量 Δr 则变为元位移 $d\mathbf{r}$ 、元路程 ds 及位矢大小的微分 dr

2 三个参数的直接推导

首先推导元位移的大小与元路程间的关系。在直角指标系中, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,则元位移 $d\mathbf{r}$ 等于 $dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$,即

$$d\mathbf{r} = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \right) dt = \mathbf{v} dt \quad (1)$$

其中, $\mathbf{v}$ 为质点的速度,有

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad (2)$$

因此,元位移 $|d\mathbf{r}| = |\mathbf{v} dt| = v dt$ 。

而由速率的定义可知 $ds = v dt$,故 $|d\mathbf{r}| = ds$ 。

位置矢量 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,其大小

$$r = |\mathbf{r}| = |x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3)$$

则

$$dr = d\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4)$$

进一步计算,可得

$$dr = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}-1} d(x^2 + y^2 + z^2) \quad (5)$$

其中

$$d(x^2 + y^2 + z^2) = 2(xdx + 2ydy + 2zdz) \quad (6)$$

而

$$\begin{aligned} & 2(xdx + 2ydy + 2zdz) \\ & = 2\left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt}\right) dt \end{aligned} \quad (7)$$

另外位置矢量 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 和速度 $\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$ 的点乘即为

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt}\right) \quad (8)$$

故

$$dr = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dt \quad (9)$$

设某个时刻位置矢量为 $\mathbf{r}$ 和速度 $\mathbf{v}$ (或元位移) 的夹角为 θ , 则 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = rv \cos \theta$, 于是

$$dr = v dt \cos \theta \quad (10)$$

由此可以看出,

$$dr = \cos \theta |d\mathbf{r}| = \cos \theta ds \quad (11)$$

和前面用图像分析^[1-21]得到的结果一致。

3 在直线运动及圆周运动的应用

不难看出, 对于直线中运动, 当位置矢量与速度同向时, $\theta = 0^\circ$, 则 $dr = |d\mathbf{r}| = ds$, 也即元位移的大小、位矢大小的微分及元路程等三者相等; 当位置矢量与速度反向时, $\theta = 180^\circ$, 则 $dr = -|d\mathbf{r}| = -ds$ 。

对于作圆周运动的质点, 其位矢和速度的方向始终垂直, 即 $\theta = 90^\circ$, 由 $dr = \cos \theta |d\mathbf{r}| = \cos \theta ds$ 得到 $dr = 0$; 这与在圆周运动中位矢的大小 r 为常数, 故 $dr = 0$ 的结果是一致的^[4]。在圆周运动中, $|d\mathbf{r}| = ds \neq 0$ 。

4 在计算万有引力及库仑力做功时的应用

如图 3 所示, 假设两个质点的质量各为 m_1 和 m_2 , 质点 m_1 静止, 质点 m_2 相对质点 m_1 沿任意轨迹由 A 运动到 B, 则质点 m_1 对 m_2 万有引力为

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}$$

其中 G 为万有引力常数, $\mathbf{r}$ 由 m_1 指向 m_2 , r 为两者的间距, m_2 从 A 运动到 B 的过程中, 万有引力对 m_2 所做的功^[1-6, 14-21]为

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \quad (12)$$

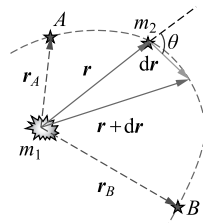


图 3 计算两个质点之间的万有引力做功, 将 m_1 和 m_2 换为点电荷 q_1 和 q_2 , 可以计算库仑力的做功

按照矢量点乘的定义, 有

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{r}| |d\mathbf{r}| \cos \theta = r |d\mathbf{r}| \cos \theta \quad (13)$$

由式(11)可知 $dr = |d\mathbf{r}| \cos \theta$, 则

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r dr \quad (14)$$

故

$$W = \int_A^B -G \frac{m_1 m_2}{r^3} r dr = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (15)$$

同理, 将图 3 的 m_1 和 m_2 换为 q_1 和 q_2 , 仍假设 q_1 静止、 q_2 相对于 q_1 沿任意路径 AB 移动, 则 q_1 对 q_2 的库仑力做功^[7-21]为

$$W_C = \int_A^B \vec{F}_C \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \frac{q_1 q_2}{4\pi r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \quad (16)$$

在上式代入 $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r dr$, 则库仑力所做的功为

$$W_C = \int_A^B \frac{q_1 q_2}{4\pi r^3} r dr = -\frac{q_1 q_2}{4\pi} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (17)$$

5 结论

本文首先在直角坐标下用微分运算推导了位矢大小的微分 dr 的表达式, 从数学上得出了位矢大小的微分 dr 与元位移的大小 $|d\mathbf{r}|$ 及元路程 ds 之间的关系, 即 $dr = \cos \theta |d\mathbf{r}| = \cos \theta ds$ (其中 θ 为位置矢量 $\mathbf{r}$ 与元位移或质点速度间的夹角), 所得结果与用图像的方法得到的结果一致。其次, 在直线运动及圆周运动的条件下对三者的关系进行了讨论。最后, 将该结果应用到了万有引力做功及库仑力做功的计算当中。本文有助于加深学生对元位移的大小、位矢大小的微分及元路程等三个参数间关系的理解。

参考文献

- [1] 赵凯华, 罗蔚茵. 力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.
ZHAO K H, LUO W Y. Mechanics[M]. Beijing: Higher

- Education Press, 1998. (in Chinese)
- [2] 漆安慎, 杜焯英, 包景东. 力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
 QI A S, DU C Y, BAO J D. Mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2018. (in Chinese)
- [3] 邓靖武, 肖址敏. 力学[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2022.
 DENG J W, XIAO Z M. Mechanics[M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2022. (in Chinese)
- [4] 梁昆森, 俞超, 邱树业. 力学讨论[M]. 成都: 四川教育出版社, 1987.
 LIANG K M, YU C, QIU S Y. Mechanics Discussion[M]. Chengdu: Sichuan Education Press, 1987. (in Chinese)
- [5] 基特乐 C, 奈特 W D, 鲁德曼 M A. 伯克利物理学教程—力学[M]. 陈秉乾, 郭敦仁, 黄昀, 等, 译. 北京: 机械工业出版社, 2016.
 KITTEL C, KNIGHT W D, RUDERMAN M A. Berkeley Physics Course-Mechanics[M]. CHEN B K, GUO D R, HUANG Y, et al. Translator. Beijing: China Machine Press, 2016. (in Chinese)
- [6] 艾伦·詹巴蒂斯塔, 贝蒂·麦卡锡·理查森, 罗伯特·理查森 C. 物理学·卷1(力学和热学)[M]. 刘兆龙, 罗莹, 冯艳全, 译. 北京: 机械工业出版社, 2015.
 Alan Giambattista, Betty McCarthy Richardson, Robert, Richardson C. Physics (Volume 1) (Mechanics and Thermology)[M]. LIU Z, LUO Y, FENG Y Q, Translator. Beijing: China Machine Press, 2015. (in Chinese)
- [7] 赵凯华, 陈熙谋. 电磁学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
 ZHAO K H, CHEN X M. Electromagnetism[M]. Beijing: Higher Education Press, 2018. (in Chinese)
- [8] 梁灿彬, 曹周键, 陈陟陶. 普通物理学教程·电磁学·拓展篇[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
 LIANG C B, CAO Z J, CHEN Z T. General Physics Course-Electromagnetism-Expanded Volume[M]. Beijing: Higher Education Press, 2018. (in Chinese)
- [9] 珀塞尔 E M, 莫林 D J. 伯克利物理学教程—电磁学[M]. 宋峰, 杨嘉, 安双新, 等, 译. 北京: 机械工业出版社, 2016.
 PURCELL E M, MORIN D J. Berkeley Physics Course-Electromagnetism[M]. SONG F, Yang J, An S X, et al. Translator. Beijing: China Machine Press, 2016. (in Chinese)
- [10] SHANKAR R. 耶鲁大学开放课程·基础物理·II, 电磁学、光学和量子力学[M]. 刘兆龙, 吴晓丽, 胡海云, 译. 北京: 机械工业出版社, 2019.
 SHANKAR R. Open Yale Courses: Fundamental Physics II-Electromagnetism, Optics, and Quantum Mechanics[M]. LIU Z L, WU X L, HU H Y, Translator. Beijing: China Machine Press, 2019. (in Chinese)
- [11] 布拉尼斯拉夫·M. 纳托拉斯. 电磁学[M]. 胡岩, 王子予, 张俊辰, 译. 北京: 清华大学出版社, 2018.
 Branislav M. Natolas. Electromagnetism[M]. HU Y, WANG Z Y, ZHANG J C, Translator. Beijing: Tsinghua University Press, 2018. (in Chinese)
- [12] 贾起民, 郑永令, 陈暨耀. 电磁学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
 JIA Q M, ZHENG Y L, CHEN J Y. Electromagnetism[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001. (in Chinese)
- [13] 张三慧. 大学物理学·力学、电磁学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.
 ZHANG S H, College Physics·Mechanics, Electromagnetism[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2009. (in Chinese)
- [14] 程守洵, 江之永. 普通物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016.
 CHENG S Z, JIANG Z Y. General physics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2016. (in Chinese)
- [15] 项林川. 大学物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.
 XIANG L C. College physics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2021. (in Chinese)
- [16] 邓法金. 大学物理学[M]. 北京: 科学出版社, 2004
 DENG F J. College physics[M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese)
- [17] 熊正烨, 石有彬, 张海康. 大学物理学[M]. 北京: 科学出版社, 2022.
 XIONG Z Y, SHI Y B, ZHANG H K. College physics[M]. Beijing: Science Press, 2022. (in Chinese)
- [18] 张宝金, 谭金凤. 大学物理学(上册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2022.
 ZHANG B J, TAN J F. College physics (Volume 1)[M]. Beijing: Higher Education Press, 2022. (in Chinese)
- [19] 刘桂媛, 李红艳. 大学物理学(下册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2022.
 LIU G Y, LI H Y. College physics (Volume 2)[M]. Beijing: Higher Education Press, 2022. (in Chinese)
- [20] 范琦, 傅振堂, 王斌科, 等. 大学物理学习指导[M]. 西安: 陕西师范大学出版总社, 2021.
 FAN Q, FU Z T, WANG B K, et al. Guidance for college physics learning[M]. Xi'an: Shaanxi Normal University Press, 2021. (in Chinese)
- [21] 东南大学等七所工科院校编, 马文蔚, 解希顺, 周雨青, 改编. 物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020.
 Compiled by Southeast University and Six Other Engineering Universities, Adapted by MA W W, XIE X S, ZHOU Y Q, Physics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2020. (in Chinese)