

狄拉克方程在库仑势下的负能量本征值

王怀玉

(清华大学物理系, 北京 100084)

摘 要 本文求解了狄拉克方程在哈密顿量中的势能是库仑势时束缚态的本征值。文献上求出的这个哈密顿量时, 一个粒子的束缚态的能量是正的但小于这个粒子静止质量并将这样的本征值称为正能量解。本文的推导结果表明, 实际上还有一个束缚态的负能量解, 其能量本征值与正能量一一对应且互为相反数。我们称之为关于正负能解的对称性。本文的结果显示, 狄拉克方程在哈密顿量中的势能是库仑势时, 无论是束缚态还是非束缚态, 都有关于正负能量解的对称性。

关键词 狄拉克方程; 正能量解; 负能量解; 正负能量的对称性

THE NEGATIVE ENERGY EIGENVALUES OF THE DIRAC EQUATION SUBJECT TO A COULOMB POTENTIAL

WANG Huaiyu

(Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract This paper solves the eigenvalues of the bound states of the Dirac equation when there is a Coulomb potential in its Hamiltonian. In the literature, only a positive energy spectrum is solved for this Hamiltonian, which is less than the rest energy and describes the bound states. The author calls it positive energy solutions. In this paper, we show that there are negative energy solutions in addition. The positive and negative energy eigenvalues are one-to-one correspondence and just contrary numbers to each other, which is called the symmetry with respect to the positive and negative eigenvalues. The present work shows that the Dirac equation with a Coulomb potential has symmetry of positive and negative eigenenergy values for both the bound states and unbound states.

Key words the Dirac equation; positive energy solution; negative energy solution; the symmetry of the positive and negative energies

一个自由粒子的狄拉克哈密顿量的形式为

$$H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2\beta \quad (1)$$

若一个粒子受到一个势能 $V(\mathbf{r})$ 的作用, 则狄拉克哈密顿量的形式为

$$H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2\beta + V(\mathbf{r}) \quad (2)$$

设有一个带电荷 e 的电子, 它受到位于原点的一个电荷 $-Ze$ 的库仑吸引作用。势能为

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3)$$

Gordon^[1] 和 Darwin^[2] 首先对于哈密顿量式(2)

收稿日期: 2025-03-31

基金项目: 国家重点研发计划资助项目(2018YFB0704304-3)。

通信作者: 王怀玉, wanghuaiyu@mail.tsinghua.edu.cn。

引文格式: 王怀玉. 狄拉克方程在库仑势下的负能量本征值[J]. 物理与工程, 2025, 35(4): 9-13, 20.

Cite this article: WANG H Y. The negative energy eigenvalues of the Dirac equation subject to a Coulomb potential[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(4): 9-13, 20. (in Chinese)

和式(3)进行了求解。在许多量子力学教科书上^[3-18]介绍了这一问题的求解步骤。给出了这个电子做稳定运动时的能量本征值为

$$E_{(+)'n',K} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + (Z\alpha)^2 / (n' + \sqrt{K^2 - (Z\alpha)^2})^2}} \quad (4)$$

其中

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \quad (5)$$

是精细结构常数, n' 是自然数, $K = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 。将式(4)中的 $Z\alpha$ 作为小量做展开

$$E_{(+)'n',K} - mc^2 = -\frac{mc^2\alpha^2}{2n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{|K|} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right],$$

$$n = n' + |K| \quad (6)$$

此式表明, 在粒子的能量 $E_{(+)'n',K}$ 中减去静止能量 mc^2 后, 就得到与从非相对论的薛定谔方程在库仑势(3)下求解出的能量相一致的结果。

式(4)的能量范围是

$$0 < E_{(+)'n',K} \leq mc^2 \quad (7)$$

这是一个正能量的解。在文献[1-18]中给出的就是这个束缚态解, 其本征能量就是式(4)。

式(4)这个结果引起两个问题。第一个问题是, 已知自由粒子的狄拉克方程有正能解和负能解两支能谱。这就是说, 对于哈密顿量(1), 求出的本征能量有

$$E_{(+)} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \quad (8)$$

和

$$E_{(-)} = -\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \quad (9)$$

其中, p 是动量。式(8)和(9)体现了狄拉克方程关于正负能量本征值的对称性。

但是对于一个粒子受到库仑势作用的时候, 只求出了正能量解(4)而未求出相应的负能量解。考虑运动的一个自由电子, 它的能量可以是式(8)也可以是式(9)。如果它进入一个库仑势场, 那么, 它的能量就会发生变化。合理的推测是, 正能量式(8)转化到相应的式(4)。可是, 负能量式(9)就没有相应的转化目标了。负能量的自由电子进入库仑势场之后, 似乎凭空消失了。

第二个问题是, 狄拉克哈密顿量式(2)是四阶矩阵, 应该有四个本征函数。对于自由粒子的情况式(1), 确实求出来四个平面波的解。其中两个对应于正能量式(8), 另外两个对应于负能量式(9)。

然而在库仑势的情况, 只得到了正能量式(4), 它对应于两个本征态, 应该还有两个本征态。

事实上, 对于库仑势的情况, 式(4)是束缚态的能量, 其能量范围是式(7)。当能量 $|E| > mc^2$ 时, 方程具有非束缚态的解, 也就是平面波解。文献[9]求解了非束缚态的情况, 确实是具有正负能解。可是在束缚态的情况, 却没有求出负能解。文献[4]中认为: 求解哈密顿量式(2)和式(3)时, “对于非束缚态, 能量 E 可取大于 mc^2 与小于 $-mc^2$ 的任意值。对于束缚态, 能量本征值可表示为”式(4)。文献[14]中强调, 狄拉克方程在库仑势时, 不存在负能解的束缚态。

作者的观点是: 狄拉克方程具有关于正负能量的对称性, 在库仑势的情况也应该如此。在本文所引的参考文献[1-18]中, 未能求出狄拉克方程在库仑势下的负能解。本文给出这一求解过程。本文以下, 首先简要回顾求解出正能量本征值式(4)的过程, 然后求解出相应的负能量本征值, 最后简要叙述负能解的物理含义。以下提到的能量本征值, 均指的是束缚态的能量本征值。

1 求解正能量的步骤

教科书[3-14]介绍了求解正能量解(4)的步骤。为了后面求出负能量的解, 有必要在此简要回顾求出正能量的推导过程。作者仿照[3]来写公式, 忽略与本文内容无关的细节。

将哈密顿量式(2)和式(3)用球坐标表示, 然后用分离变量法将波函数写成角向波函数和径向波函数的乘积。角向波函数的因子就是球谐函数, 以下不再涉及。径向波函数的形式是 $\begin{pmatrix} f(r) \\ g(r) \end{pmatrix}$, 其中 f 和 g 都是两个分量的旋量。令

$$\begin{pmatrix} f(r) \\ g(r) \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} F(r) \\ G(r) \end{pmatrix} \quad (10)$$

就得到 F 和 G 满足的联立方程

$$\frac{dF}{dr} - \frac{K}{r}F = \left(\frac{mc^2 + E}{\hbar c} + \frac{Z\alpha}{r} \right) G \quad (11a)$$

$$\frac{dG}{dr} + \frac{K}{r}G = \left(\frac{mc^2 - E}{\hbar c} - \frac{Z\alpha}{r} \right) F \quad (11b)$$

令

$$c_1 = (mc^2 + E)/\hbar, \quad c_2 = (mc^2 - E)/\hbar \quad (12)$$

$$\lambda = \sqrt{c_1 c_2} = \sqrt{m^2c^4 - E^2}/\hbar \quad (13)$$

$$\rho = \lambda r \quad (14)$$

则式(11)成为

$$\frac{dF}{d\rho} - \frac{K}{\rho}F = \left(\frac{c_1}{\lambda} + \frac{Z\alpha}{\rho}\right)G \quad (15a)$$

$$\frac{dG}{d\rho} + \frac{K}{\rho}G = \left(\frac{c_2}{\lambda} - \frac{Z\alpha}{\rho}\right)F \quad (15b)$$

考虑到当 $\rho \rightarrow \infty$ 时, 波函数应该趋于零, 可令

$$F(\rho) = e^{-\rho}u(\rho), \quad G(\rho) = e^{-\rho}w(\rho) \quad (16)$$

将式(16)代入式(15), 得到

$$\left(\frac{d}{d\rho} - \frac{K}{\rho} - 1\right)u = \left(\frac{c_1}{\lambda} + \frac{\alpha}{\rho}\right)w \quad (17a)$$

$$\left(\frac{d}{d\rho} + \frac{K}{\rho} - 1\right)w = \left(\frac{c_2}{\lambda} - \frac{\alpha}{\rho}\right)u \quad (17b)$$

用级数法求解方程组(17)。令

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \rho^{i+s}, \quad w = \sum_{i=0}^{\infty} d_i \rho^{i+s} \quad (18)$$

式(18)代入式(17), 令方程两边的同次幂的系数相等, 就得到以下关系式

$$b_0(s-K) - d_0\alpha = 0 \quad (19a)$$

$$d_0(s+K) + b_0\alpha = 0 \quad (19b)$$

当 $i > 0$ 时

$$b_i(i+s-K) - b_{i-1} - d_{i-1}\frac{c_1}{\lambda} - d_i\alpha = 0 \quad (20a)$$

$$d_i(i+s+K) - d_{i-1} - b_{i-1}\frac{c_2}{\lambda} + b_i\alpha = 0 \quad (20b)$$

由(19)求解出

$$s = \sqrt{K^2 - Z^2\alpha^2} \quad (21)$$

从式(18)考虑, 在原点附近, 波函数必须有限, 因此式(21)开根号时应取正值。

现在将(20a)和式(20b)如下组合

$$(20a) \times \frac{c_2}{\lambda} - (20b) \quad (22)$$

可得到

$$\frac{b_i}{d_i} = \frac{i+s+K+\frac{c_2}{\lambda}\alpha}{(i+s-K)\frac{c_2}{\lambda}-\alpha} \quad (23)$$

级数解式(18)如果包含无穷多项的话, 有可能不收敛。为了保证收敛, 需要令级数只包含有限项。这就是说, 让高于某一幂次的项的系数都为零。在(20a)中, 令 $i = n' + 1$, 并假定非零的最高幂次为 n' , 即令 $b_{n'+1} = d_{n'+1} = 0$ 。得到

$$b_{n'} + d_{n'}\frac{c_1}{\lambda} = 0 \quad (24)$$

式(23)对于 $i = n'$ 也成立。即有

$$\frac{b_{n'}}{d_{n'}} = \frac{n'+s+K+\frac{c_2}{\lambda}\alpha}{(n'+s-K)\frac{c_2}{\lambda}-\alpha} \quad (25)$$

式(25)与(24)结合, 就得到

$$-\frac{c_1}{\lambda} = \frac{n'+s+K+\frac{c_2}{\lambda}\alpha}{(n'+s-K)\frac{c_2}{\lambda}-\alpha} \quad (26)$$

式(26)经过整理后得到

$$2(n'+s) = \frac{\alpha}{\lambda}(c_1 - c_2) = \frac{2E\alpha}{\sqrt{m^2c^4 - E^2}} \quad (27)$$

将两边平方后, 整理得

$$E^2 = \frac{m^2c^4}{1 + \alpha^2/(s+n')^2} \quad (28)$$

对于式(28)开根号时应注意, 式(27)的左边是正数, 因此, E 只能是个正数。对于式(28)开根号就只能取正号。如此, 就得到本征值式(4), 其中用到了式(21)。

从这个求解步骤, 我们确实只能得到正的能量值。现在我们尝试另一条路径。将式(20a)和式(20b)如下组合

$$(20a) - (20b) \times \frac{c_1}{\lambda} \quad (29)$$

可得到

$$\frac{b_i}{d_i} = \frac{(i+s+K)\frac{c_1}{\lambda} + \alpha}{i+s-K-\alpha\frac{c_1}{\lambda}} \quad (30)$$

在式(20b)中, 令 $i = n' + 1$, 并假定非零的最高幂次为 n' , 即令 $b_{n'+1} = d_{n'+1} = 0$ 。得到

$$d_{n'} + b_{n'}\frac{c_2}{\lambda} = 0 \quad (31)$$

在式(30)中, 令 $i = n'$

$$\frac{b_{n'}}{d_{n'}} = \frac{(n'+s+K)\frac{c_1}{\lambda} + \alpha}{n'+s-K-\alpha\frac{c_1}{\lambda}} \quad (32)$$

式(32)与式(31)结合

$$-\frac{c_2}{\lambda} = \frac{u-K-\alpha\frac{c_1}{\lambda}}{(u+K)\frac{c_1}{\lambda} + \alpha} \quad (33)$$

对式(33)进行整理, 同样得到式(27)。因此还是只得到正能量。

2 求解负能量本征值

我们先一般地证明:定态狄拉克方程具有正负能量本征值。

将式(2)的哈密顿量写成如下的矩阵形式。

$$H(V) = \begin{pmatrix} mc^2 + V & c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -mc^2 + V \end{pmatrix} \quad (34)$$

定态本征方程就是 $H(V)\Psi = E\Psi$ 。现在,将波函数写成如下的二分量形式, $\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ 。定义变换矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

对于定态方程做如下变换: $TH(V)T^{-1}T\Psi = ET\Psi$ 。变换的结果是

$$H(-V)\Phi = -E\Phi \quad (36)$$

可见,若在势能 V 时,从狄拉克方程求得正能解,那么,势能取反号,狄拉克方程^[19]就从 $-V$ 求得负能解。正负能解是从同一个方程同时求出的。

根据以上的讨论,为了求出库仑势时的负能解,我们只需要在方程组(11)中将两个分量 F 和 G 交换,并将能量 E 改为 $-E'$ 。由此得到的方程组为

$$\frac{dG}{dr} + \frac{K}{r}G = \left(\frac{mc^2 - E'}{\hbar c} - \frac{Z\alpha}{r} \right) F \quad (37a)$$

$$\frac{dF}{dr} - \frac{K}{r}F = \left(\frac{mc^2 + E'}{\hbar c} + \frac{Z\alpha}{r} \right) G \quad (37b)$$

注意,从此方程求出 E' 后,应加上负号, $-E'$ 才是真正的本征值。按照式(12)~(14)定义各量之后,方程组(37)成为

$$\frac{dG}{d\rho} + \frac{K}{\rho}G = \left(\frac{c_2}{\lambda} - \frac{Z\alpha}{\rho} \right) F \quad (38a)$$

$$\frac{dF}{d\rho} - \frac{K}{\rho}F = \left(\frac{c_1}{\lambda} + \frac{Z\alpha}{\rho} \right) G \quad (38b)$$

将方程组(38)与(15)对照,前者中的 E' 换成 E , 两者就完全一样了。因此,可以照抄式(16)~(33)的过程来求解(38)。求解出来的 E' 的表达式就是式(4)。真正的本征值是 $-E'$, 也就是式(4)的负号:

$$E_{(-)n',K} = - \frac{mc^2}{\sqrt{1 + (Z\alpha)^2 / (n' + \sqrt{K^2 - (Z\alpha)^2})^2}} \quad (39)$$

可见,库仑势下的能量本征值确实有正负两支。正能量支就是式(4),正负能量支互为相反数。将其中的负能量支仿照式(6)做展开

$$E_{(-)n',K} - (-mc^2) = \frac{mc^2\alpha^2}{2n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{|K|} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right], \quad n = n' + |K| \quad (40)$$

与式(6)刚好是相反数。 $E_{(-)n',K}$ 的范围是

$$0 > E_{(-)n',K} \geq -mc^2 \quad (41)$$

式(41)的范围与式(7)对称。

此处我们要强调:当电子具有负能量 $E_{(-)n',K}$ 的时候,它的质量仍然是 m , 电荷仍然是 e 。这两个量已经在哈密顿量(2)和(3)中确定了,在求解过程中是不会改变的。

3 结语

本文仔细求解了库仑势下的狄拉克方程的束缚态的能量本征值。除了文献中已经给出的正能量支,本文求出了负能量支。正负能量值一一对应并且互为相反数。狄拉克方程具有正负能量的对称性。不仅对于非束缚态如此,对于束缚态也是如此。

狄拉克方程的正能量解与经典力学中狭义相对论的内容是有对应关系的。对于其负能量解,应该有逻辑自洽的物理解释并且应该在我们的宇宙中有对应物。关于这一点,会涉及较为广泛的物理内容。有兴趣的读者可以参看作者在这方面的系列论文^[20-27]。

参 考 文 献

- [1] GORGON W. Die Energieniveaus des Wasserstoffatoms nach der Diracschen Quantentheorie des Elektrons[J]. Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei, 1928, 48(1): 11-14.
- [2] DARWIN C G. The wave equations of the electron[J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 1928, 118(780): 654-680.
- [3] 曾谨言. 量子力学下册[M]. 北京:科学出版社,1980. ZENG J Y. Quantum mechanics, 2nd volume[M]. Beijing: Science Press, 1980. (in Chinese)
- [4] 杨泽森. 高等量子力学[M]. 2版. 北京:北京大学出版社, 1995. YANG Z S. Advanced quantum mechanics[M]. 2nd ed. Beijing: Peking University Press, 1995. (in Chinese)

- [5] 喀兴林. 高等量子力学[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2001.
KA X L. Advanced quantum mechanics[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2001. (in Chinese)
- [6] 刘希明. 高等量子力学[M]. 2 版. 济南: 山东科学技术出版社, 2002.
LIU X M. Advanced quantum mechanics[M]. 2nd ed. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 2002. (in Chinese)
- [7] 苏汝铿. 量子力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
SU R K. Quantum mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2002. (in Chinese)
- [8] SCHIFF L I. Quantum mechanics[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1949.
- [9] MESSIAH A. Quantum mechanics [M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1962.
- [10] BJORKEN J D, DRELL S D. Relativistic quantum mechanics[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1965.
- [11] YNDURAIN F J. Relativistic quantum mechanics and introduction to field theory[M]. Berlin: Springer, 1996.
- [12] FLUGGE S. Practical quantum mechanics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- [13] BRANSDEN B H, JOACHAIN C J. Quantum mechanics [M]. 2nd ed. London: Pearson Education Limited, 2000.
- [14] GREINER W. Relativistic quantum mechanics wave equations[M]. 3rd ed. Berlin: Springer, 2000.
- [15] ABERS E S. Quantum mechanics[M]. New Jersey: Pearson Educations, Inc., 2004.
- [16] THALLER B. Advanced visual quantum mechanics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
- [17] SCHWABL F. Advanced quantum mechanics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
- [18] WACHTER A. Relativistic quantum mechanics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2011.
- [19] DIRAC P A M. A Theory of Electrons and Protons[J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 1930, 126(801): 360-365. <https://www.jstor.org/stable/95359>
- [20] WANG H Y. New results by low momentum approximation from relativistic quantum mechanics equations and suggestion of experiments[J]. Journal of Physics Communications, 2020, 4: 125004.
- [21] WANG H Y. Fundamental formalism of statistical mechanics and thermodynamics of negative kinetic energy systems[J]. Journal of Physics Communications, 2021, 5: 055012.
- [22] WANG H Y. Macromechanics and two-body problems[J]. Journal of Physics Communications, 2021, 5: 055018.
- [23] 王怀玉. 维里定理及其对称性[J]. 华北科技学院学报, 2021, 18(4): 1-10.
WANG H Y. Virial theorem and its symmetry[J]. Journal of North China Institute of Science and Technology, 2021, 18(4): 1-10. (in Chinese)
- [24] 王怀玉. 基于狄拉克方程推导求解一维势垒问题[J]. 华北科技学院学报, 2022, 19(1): 97-107.
WANG H Y. Resolving problems of one-dimensional potential barriers based on Dirac equation[J]. Journal of North China Institute of Science and Technology, 2022, 19(1): 97-107. (in Chinese)
- [25] WANG H Y. The modified fundamental equations of quantum mechanics[J]. Physics Essays, 2022, 35(2): 152-164.
- [26] WANG H Y. The behaviors of the wave functions of small molecules with negative kinetic energies[J]. Physics Essays, 2023, 36(2): 140-148.
- [27] WANG H Y. A physical mechanism of the generation of stable positive kinetic energy systems and a qualitative explanation of the proportions of the four ingredients in the universe[J]. Physics Essays, 2023, 36(4): 385-398.

附: 审稿人意见及作者回复(摘录)

审稿意见(一)

- 文章结果是不自洽的

如果(41)成立, $E \in [-m, 0]$,

$$\frac{c_1}{\lambda} = \frac{m+E}{\sqrt{m^2-E^2}} \geq 0$$

而(36)中取负号的根 <0 。

即(36)与(41)矛盾。

- 更重要的是: 级数截断时, (24)(25)(31)(32)都成立, 它们给出的(27)也成立。

公式(39)只是级数截断的必要条件(即正负号两种能量), 但其中负号的结果与(27)矛盾。

答复(一)

审稿人的意见是对的。我仔细检查后发现, 这个矛盾是原稿中将(24)与(32)结合导致的, 说明我这样的求解步骤有些不全。

在修改稿中, 我采用了更为周全的步骤。此处简略介绍如下(详细内容见修改稿)。

在修改稿的第2部分, 将带有势能 V 的狄拉克哈密顿量记为 $H(V)$ 。先是一般地证明: 狄拉克方程若从势能 V 时求得正能解, 即有,

$$H(V)\Psi = E\Psi \quad (1)$$

那么, 一定能够从 $-V$ 求得负能解, 即有

$$H(-V)\Phi = -E\Phi \quad (2)$$

式(1)和(2)之间是一个线性变换的关系。此两式的波函数之间的关系可以是

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi \quad (3)$$

(下转第20页)

并)能级的存在。当宇称守恒和时间反转变性被同时破坏的情况下,基本粒子也有可能具有永久电偶极矩。本文有助于初学原子分子物理学的人以及对这一领域感兴趣的外行了解永久电偶极矩这个概念在原子分子物理学中的微妙含义并避免理解上的困难。

参 考 文 献

- [1] PURCELL E M, MORIN D J. 伯克利物理学教程 第二卷 电磁学[M]. 宋峰,杨嘉,安双新,等,译. 北京:机械工业出版社,2017.
PURCELL E M, MORIN D J. Berkeley physics course II electricity and magnetism[M]. SONG F, Yang J, AN S X, et al. Translator. Beijing: China Machine Press, 2017. (in Chinese)
- [2] JACKSON J D. Classical electrodynamics [M]. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 1999: 150-151.
- [3] DEBYE Von P. Einige Resultate einer kinetischen Theorie der Isolatoren[J]. Physikalische Zeitschrift, 1912, 13(3): 97-100.
- [4] DEBYE Von P. Polar molecules [M]. New York: Dover Publications, 1929: 22-35.
- [5] MERZBACHER E. Quantum mechanics [M]. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1970: 420-425.
- [6] SCHIFF L I. Quantum mechanics [M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1968.
- [7] SAKURAI J J. Modern quantum mechanics [M]. New York: Addison-Wesley, 1994: 303-304.
- [8] STARK J. Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. V. Feinzerlegung der Wasserstoffserie Annalen der Physik [J]. 1915, 353(18): 193-209.
- [9] VAN VLECK J H. The theory of electric and magnetic susceptibilities [M]. Oxford: Oxford University Press, 1932: 27.
- [10] LEVINE Ira N. The quantum chemistry [M]. 7th ed. Boston: Pearson Education, 2014.
- [11] 别列斯捷茨基,栗弗席兹,皮塔耶夫斯基. 量子电动力学 [M]. 朱允伦,译. 北京:高等教育出版社,2015:200-201.
BERESTETSKII V B, LIFSHITZ E M, PITAEVSKII L P. Quantum electrodynamics [M]. ZHU Y L. Translator. Beijing: Higher education Press, 2015. (in Chinese)
- [12] ATKINS P, FRIEDMAN R. Molecular quantum mechanics [M]. 5th ed. Oxford: Oxford University Press, 2011.
- [13] VAN VLECK J H. On σ -type doubling and electron spin in the spectra of diatomic molecules [J]. Physical Review, 1929, 33(4): 467-506.
- [14] TOWNES C H, SHAWLOW A L. Microwave spectroscopy [M]. New York: McGraw-Hill, 1955.
- [15] ANDERSON P W. More is different [J]. Science, 1972, 177(4047): 393-396.
- [16] BASDEVANT J L. Lectures on quantum mechanics [M]. Berlin: Springer Science+Business Media, 2007.
- [17] SANDARS P G H. Electric dipole moments of charged particles [J]. Contemporary Physics, 2001, 42(2): 97-111.
- [18] CHUPP T E, FIERLINGER P, RAMSEY-MUSOLF M J, et al. Electric dipole moments of atoms, molecules, nuclei, and particles [J]. Reviews of Modern Physics, 2019, 91(1): 015001.
- [19] TALMAN R. 电偶极矩挑战 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2021.
TALMAN R. The electric dipole challenge [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2021.

(上接第 13 页)

也可以是

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi \quad (4)$$

也就是说,将(1)的波函数写成二分量 $\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ 的形式,那么,将这两个分量交换,就成为(2)中的波函数,由(2)求出的能量本征值与(1)的本征值符号相反。所以,狄拉克方程的能量本征值总是正负成对的。

以上的这个证明未在文献上见到过。

然后,对于库仑势的具体情况,我将式(11)中波函数的两个分量交换,同时将势能取反号。仿照第 1 部分求解正能量解的步骤,最后求得负能量解。

审稿意见(二)

该论文在库仑势中求解狄拉克方程,试图证明狄拉克方程存在负能量解,也就是说,电子存在负能量。从数学推导的角度看问题不大。但是问题在于数学运算结果不

一定对应真实的物理。所以在很多物理问题求解过程中都会把非物理的解给去掉。举两个例子:(1)就像该论文所讨论的中心力场求解波函数,此时就需要依据波函数全空间积分有限而去掉 $l \geq 1$ 时去掉 $R_l \propto r^{-(l+1)}$ 的可能解;(2)求解散射问题的时候,往往在求解过程中把射向中心的波函数解给扔掉。所以论文结论的问题在于,物理上到底对应了什么,怎么做实验检验论文结论。我们知道能量的概念经过一个漫长的过程,物理学家经过不断理论探索和大量的实验检验,最后总结得到能量概念。比如机械能,对应动能和势能。动能是正的,势能值正负依赖于参考点的定义等等。这些都可以方便的检验。该论文所讨论的负能量、负静止能量等概念,怎么检验?如果不能检验,那不管数学运算结果是什么?其实都是没有太大意义的。作者能不能设想一下确证性实验来说明有别于正能量的负能量的确存在?