



理想气体多方过程的比热及其基本特征

苏山河 赵英汝 陈金灿

(厦门大学物理系, 福建 厦门 361005)

摘要 根据理想气体多方过程方程中的多方指数为常数的特性, 阐明多方过程的比热密切依赖于理想气体的等容比热。当理想气体等容比热为常数时, 比热为常数的热力学过程均为多方过程, 多方指数的取值没有禁区。当理想气体的等容比热是温度的函数时, 比热为常数的热力学过程不是多方过程, 如比热为零的绝热过程不是多方过程, 多方指数的取值有禁区。仅当热力学过程的比热表示式类似于等容比热表示式且具有相同的温度函数时, 该热力学过程才是理想气体的多方过程。理想气体多方过程的基本特征是过程比热与等容比热之差为常数。

关键词 多方过程; 比热; 等容比热; 温度; 理想气体

THE SPECIFIC HEAT AND BASIC CHARACTERISTIC OF THE POLYTROPIC PROCESS OF IDEAL GASES

SU Shanhe ZHAO Yingru CHEN Jincan

(Department of Physics, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005)

Abstract According to the characteristic that the polytropic exponent in the equation of the polytropic process of ideal gases remains the same, it is expounded that the specific heat of the polytropic process is closely related to the specific heat at constant volume of ideal gases. When the specific heat at constant volume of ideal gases is constant, all the thermodynamic processes with constant specific heat are classified as the polytropic processes of ideal gases, and there is no forbidden area for the value of the polytropic exponent. However, when the specific heat at constant volume of ideal gases varies with temperature, the thermodynamic processes with constant specific heat do not belong to polytropic processes, such as the adiabatic process with the zero specific being not a polytropic process, and there is a forbidden area for the value of the polytropic exponent. Only when the specific heat of a thermodynamic process resembles the specific heat at constant volume of ideal gases and has the same temperature dependency, can the thermodynamic process be a polytropic process of ideal gases. The basic characteristic of the polytropic process of ideal gases is that the difference between the specific heat of the process and the specific heat at constant volume is constant.

Key words polytropic process; specific heat; specific heat at constant volume; temperature; ideal gas

收稿日期: 2024-11-25

基金项目: 福建省高校物理学学科联盟教育教学改革研究项目(FJPHYS-2023-A02)资助。

通信作者: 陈金灿, jcchen@xmu.edu.cn。

引文格式: 苏山河, 赵英汝, 陈金灿. 理想气体多方过程的比热及其基本特征[J]. 物理与工程, 2025, 35(4): 5-8.

Cite this article: SU S H, ZHAO Y R, CHEN J C. The specific heat and basic characteristic of the polytropic process of ideal gases[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(4): 5-8. (in Chinese)

多方过程是一种重要的热力学过程,经常用来模拟实际工程热力学系统。多方过程在工程热力学中经常被讨论^[1,2],但在热力学教材中却很少被讨论,往往是作为一道习题给出^[3-6]。无论是工程热力学教材还是热力学教材,多方过程通常是通过推广等温、绝热等过程而得到的,或者通过定义多方指数导出过程方程的^[7,8],而对多方过程的特征缺乏详细深入的讨论。因此,很有必要对多方过程的比热及其基本特征作专门的探讨。

1 理想气体的多方指数与过程比热

对于一摩尔理想气体,状态方程和内能 U 的微分可分别表示为

$$PV = RT \quad (1)$$

和

$$dU = dQ + dW \quad (2)$$

其中, P , V 和 T 分别为热力学系统的压力、体积和温度, R 为摩尔气体常数, dQ 和 dW 与过程有关,它们分别表示系统吸收的热量和环境对系统所做的功。对于只包含体变功的热力学系统, $dW = -PdV$ 。应用式(1)和(2),可得

$$VdP + PdV = RdT = \frac{R}{c - c_V} PdV \quad (3)$$

其中, $c = dQ/dT$ 和 c_V 分别为理想气体为任一过程的摩尔比热和等容过程的摩尔比热。

对于理想气体的任一热力学过程, $P = F(V)$, 由式(3)可得摩尔比热的表示式为^[9]

$$c = c_V + \frac{R}{1 + d \ln P / d \ln V} = \frac{R}{1 + d \ln F / d \ln V} \quad (4)$$

当^[4,5,9,10]

$$1 - R/(c - c_V) = 1 - R/(c_n - c_V) = n \quad (5a)$$

或^[11]

$$d \ln P / d \ln V = -n \quad (5b)$$

时,由式(3)或(5b)可得理想气体的多方过程为

$$PV^n = \text{Const.} \quad (6)$$

其中, n 称为多方指数, $c = c_n$ 称为理想气体多方过程的摩尔比热。由式(5)可知,多方过程的基本特征是 n 等于一个包含正、负无穷大的常数。

教科书得到式(5a)和(6)后,通常会进一步指出等容、等压、等温、绝热过程是理想气体多方过

程的一些特殊形式,如图1所示^[12],图中不同灰度的曲线均基于式(6)、通过结合 Python 计算程序和 Origin 绘图软件生成, V_0 和 P_0 分别为系统初始时刻的体积和压力,试验时可方便确定。然而,教科书和文献对式(5a)中的多方过程摩尔比热 c_n 未作详细的讨论。

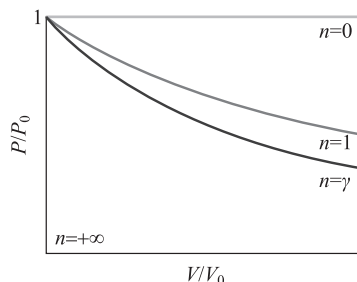


图1 理想气体多方过程的 V - P 示意图

其中包含等压、等温、绝热、等容过程, γ 为理想气体比热比。图中可选择系统初始时刻的体积和压力为 V_0 和 P_0 ,使得横坐标 V/V_0 和纵坐标 P/P_0 成为无量纲的参量便于作图

2 多方过程摩尔比热的特性

为了探讨多方过程摩尔比热的特性,现将式(5a)改写为

$$c_n = c_V + R/(1 - n) \quad (7)$$

由式(7)可清楚地看出, $c_n \in [-\infty, +\infty]$,这不同于摩尔等容比热 c_V 和摩尔等压比热 c_P 的取值范围。实际上,直接由 c 的定义式也可确定 c_n 的取值范围。顺便指出,比热为负值的过程是一种常见的热力学过程,已有一些文献^[13,14]和教科书^[9]作过专门的讨论。由式(7)可知, c_n 依赖于 c_V 与参数 n 和 R 。下面将应用式(5a)或(7)讨论 c_n 与 c_V 间的关系,获得新结论可加深读者对理想气体多方过程摩尔比热的了解。

(1) 当理想气体的摩尔等容比热 c_V 为常数 c_V^0 时,摩尔比热 c 为常数 c_n^0 时的热力学过程均为理想气体的多方过程。对于理想气体, $c_V^0 = iR/2$, 其中 i 为自由度,而 c_n^0 是由 c_V^0 、 R 和 n 确定的,可直接用式(7)算出。应用式(6)可知,理想气体的多方过程在 V - P 平面上如图2(a)所示。由图2(a)可清楚看出,多方指数的取值没有禁区。当多方过程出现在 V - P 平面上的第二和第四象限时, $n \in [0, +\infty]$;而当多方过程出现在 V - P 平面上的第一和第三象限时, $n \in [-\infty, 0]$ 。当 $n > 0$ 时,系统体积膨胀压力下降或系统体积压缩压力上

升,如等温过程、绝热过程。当 $n < 0$ 时,系统体积膨胀压力上升,系统吸热、气体温度升高;系统体积压缩压力下降,系统放热、气体温度降低。当 $n = 0$ 时,系统压力不变,即等压过程。当 $n = \pm\infty$ 时,系统体积不变,即等容过程。当 $c_n^0 > 0$ 时,理想气体的多方过程在 V - P 平面上如图 2(b)所示,图中灰色区域是理想气体出现多方过程的禁区。根据式(7)可知, $1 < n \leq \gamma$ 不在 $c_n = c_n^0 > 0$ 的范围内,其中 $\gamma = c_P/c_V$ 为比热比。 $c_n^0 > 0$ 对应于两种不同情况:一种情况是理想气体系统吸热、气体温度上升,即 $dQ > 0$ 和 $dT > 0$;另一种情况是理想气

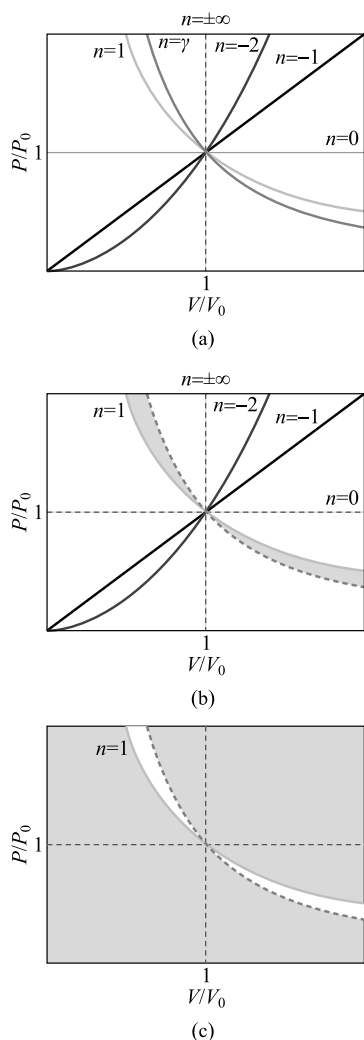


图2 理想气体的摩尔等容比热 $c_V = c_V^0$ 为常数时,(a) 理想气体的摩尔比热 $c = c_n^0$ 为常数的多方过程在 V - P 平面上的示意图;(b) $c_n^0 > 0$ 时理想气体多方过程在 V - P 平面上的示意图;(c) $c_n^0 < 0$ 时理想气体多方过程在 V - P 平面上的示意图。在(b)和(c)中的虚线表示 $c_n^0 = 0$ 的绝热过程, $n = \gamma$ 既不落入 $c_n^0 > 0$ 的范围内又不落入 $c_n^0 < 0$ 的范围内,因而不落在虚线上标记

体系统放热、气体温度降低,即 $dQ < 0$ 和 $dT < 0$ 。当 $c_n^0 < 0$ 时,理想气体的多方过程在 V - P 平面上如图 2(c)所示,图中灰色区域是理想气体出现多方过程的禁区,因为 $n < 1$ 和 $\gamma \leq n$ 都不在 $c_n = c_n^0 < 0$ 的范围内。 $c_n^0 < 0$ 也对应于两种不同情况:一种情况是理想气体系统吸热、气体温度降低,即 $dQ > 0$ 和 $dT < 0$;另一种情况是理想气体系统放热、气体温度上升,即 $dQ < 0$ 和 $dT > 0$ 。当 $n = \gamma$ 时, $c_n^0 = 0$ 不在 $c_n^0 > 0$ 和 $c_n^0 < 0$ 的范围内,理想气体系统进行绝热过程,在 V - P 平面上如图 2(b)和(c)中的虚线所示,但图中不标记 $n = \gamma$ 。由图 2 清楚看出,当 $c_n^0 \geq 0$ 时可出现等容、等压、等温、绝热过程等多方过程;而当 $c_n^0 \leq 0$ 时,由式(7)可知, n 不能选取 ∞ 和 0,故不会出现等容和等压多方过程,仅可出现等温和绝热过程等多方过程。

(2) 理想气体系统的内能是温度的函数,摩尔等容比热通常也是温度的函数,即 $c_V = c_V^0 + f(T)$ 。由式(5a)可看出,摩尔比热 $c = c_n^0$ 为常数的热力学过程不是理想气体的多方过程。仅当热力学过程的摩尔比热表式类似于摩尔等容比热表式且具有相同温度函数时,即 $c = c_n = c_n^0 + f(T)$,该热力学过程才是理想气体的多方过程,在 V - P 平面上如图 3(a)所示,图中虚线是由 $d \ln P / d \ln V = -c_P(T)/c_V(T) = -\gamma(T)$ 确定的,是出现多方过程的禁区。因为比热比 $\gamma(T)$ 是温度的函数,无法导出多方过程方程。这表明多方指数的取值有禁区。当 $c_n^0 > 0$ 时,理想气体的多方过程在 V - P 平面上如图 3(b)所示,图中灰色区域是出现理想气体多方过程的禁区。当 $c_n^0 < 0$ 时,理想气体的多方过程在 V - P 平面上如图 3(c)所示,图中灰色区域是出现多方过程的禁区。理想气体在图 3(b)和(c)中所对应的吸热和放热情况与图 2(b)和(c)所描述的情况相同。当 $c = 0$ 时,理想气体系统进行绝热过程,但不是多方过程,这非常不同于理想气体的摩尔等容比热 $c_V = c_V^0$ 为常数时的情况。由图 3 可见,当摩尔等容比热为温度的函数时,存在出现多方过程的禁区。这是研究理想气体多方过程特性值得注意的问题。

3 结论

理想气体多方过程比热密切依赖于理想气体的等容比热,可以是常数,也可以是温度的函数。

理想气体的等容比热为常数时,比热为常数

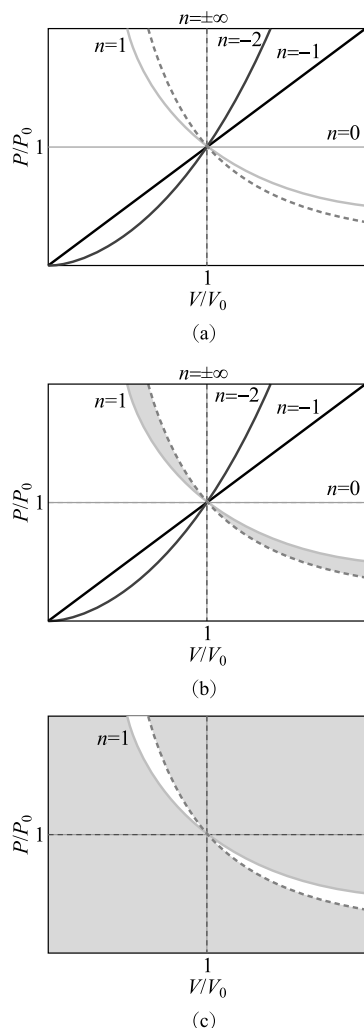


图3 理想气体的摩尔等容比热 $c_V = c_V^0 + f(T)$ 为温度的函数时, (a) 理想气体的摩尔比热 $c = c_n^0 + f(T)$ 的多方过程在 V - P 平面上的示意图; (b) $c_n^0 > 0$ 时理想气体多方过程在 V - P 平面上的示意图; (c) $c_n^0 < 0$ 时理想气体多方过程在 V - P 平面上的示意图。图中的灰色粗虚线示意理想气体摩尔等容比热为温度的函数时绝热过程不属于多方过程的区域, 所以不能标注 n 的值

的热力学过程均为理想气体的多方过程, 多方指数的取值没有禁区。

理想气体的等容比热为温度的函数时, 比热为常数的热力学过程不是理想气体的多方过程。仅当热力学过程的比热也是温度的函数且表式与等容比热的温度函数相同时, 该热力学过程才能成为理想气体的多方过程, 但绝热过程不属于理想气体的多方过程, 多方指数的取值有禁区。

无论等容比热是常数还是温度的函数, 理想气体多方过程的基本特征是过程的比热与等容比热之差为常数。

本文的结论可适用于任意摩尔的理想气体系统。

参 考 文 献

- [1] FOUST III H C. Thermodynamics, gas dynamics, and combustion[M]. Switzerland: Springer, 2022.
- [2] LENZ J R. Polytropic exponents for common refrigerants [C]. Proceedings of the International Compressor Engineering Conference, 2002.
- [3] 王竹溪. 热力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1955.
WANG Z X. Thermodynamics[M]. Beijing: High Education Press, 1955. (in Chinese)
- [4] 汪志诚. 热力学统计物理[M]. 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2013.
WANG Z C. Thermodynamics and statistical physics[M]. 5th ed. Beijing: High Education Press, 2013. (in Chinese)
- [5] 林宗涵. 热力学与统计物理学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2007.
LIN Z H. Thermodynamics and statistical physics[M]. Beijing: Peking University Press, 2007. (in Chinese)
- [6] 刘川. 热力学与统计物理学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2022.
LIU C. Thermodynamics and statistical physics[M]. Beijing: Peking University Press, 2022. (in Chinese)
- [7] 高崇伊, 朱琴. 多方过程的定义及其和准静态过程的关系 [J]. 大学物理, 2006, 25(2): 13-15.
GAO C Y, ZHU Q. The definition of polytropic process and the relation between it and the quasi-static process[J]. College Phys., 2006, 25(2): 13-15. (in Chinese)
- [8] 杨恩智, 王保成, 姬国庆. 关于理想气体摩尔热容的探讨 [J]. 物理与工程, 1999, 9(4): 47-48.
YANG E Z, WANG B C, JI G Q. Discussion on molar heat capacity of ideal gas[J]. Phys. Eng., 1999, 9(4): 47-48. (in Chinese)
- [9] 陈金灿, 苏山河, 苏国珍. 热力学与统计物理学——热点问题思考与探索[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2023.
CHEN J C, SU S H, SU G Z. Thermodynamics and statistical physics—Thoughts and explorations on hot issues[M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2023. (in Chinese)
- [10] KNIGHT R. All about polytropic processes[J]. Phys. Teach., 2022, 60: 422-424.
- [11] CHRISTIANS J. Approach for teaching polytropic processes based on the energy transfer ratio[J]. Int. J. Mech. Eng. Educ., 2012, 40: 53-65.
- [12] GROTE K H, ANTONSSON E K. Handbook of mechanical engineering[M]. Berlin: Springer, 2009.
- [13] HERNANDEZ A C. Heat capacity in a negatively sloping, straight-line process[J]. Am. J. Phys., 1995, 63: 756-756.
- [14] VELASCO S, GONZALEZ A, WHITE J A, et al. Heat capacity of an ideal gas along an elliptical PV cycle[J]. Am. J. Phys., 2002, 70: 1044-1048.