

准稳态法测量物体导热系数的误差探究

黄运洋¹ 黄颖怡² 林志萍²

(¹ 广东工业大学机电工程学院, 广东 广州 510006; ² 广东工业大学物理与光电工程学院, 广东 广州 510006)

摘 要 准稳态法测量导热系数实验因操作简便、加热时间较短而被广泛采用。但常规的准稳态法中忽略热扩散方程解的级数部分会导致一个系统误差。使用引入级数部分的改进公式, 导热系数变小。而且导热系数依赖于改进公式中含时参数的不同取值。利用改进公式, 可以计算在不同的含时指数系数下导热系数的系统误差; 也可以计算针对不同材料, 可节省的实验时间。准稳态法测量物体导热系数可以作为物理相关专业本科生物理创新实验, 帮助大学生掌握导热系数测量原理和系统误差的分析方法。

关键词 导热系数; 传热学; 准稳态; 误差分析

STUDY ON THE ERROR OF THERMAL CONDUCTIVITY MEASUREMENT BY QUASI-STEADY STATE METHOD

HUANG Yunyang¹ HUANG Yingyi² LIN Zhiping²

(¹ School of Electromechanical Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510006;

² School of Physics and Optoelectronic Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510006)

Abstract The quasi-steady-state method for measuring thermal conductivity is widely used due to its simple operation and relatively short heating time. However, the conventional quasi-steady-state method, which neglects the series part of the solution to the heat diffusion equation, leads to a systematic error. Using an improved formula that incorporates the series part, the thermal conductivity decreases. Moreover, the thermal conductivity depends on different values of the time-dependent parameter in the improved formula. With the improved formula, it is possible to calculate the systematic error of thermal conductivity under different time index coefficients. It is also possible to calculate the experimental time that can be saved for different materials. The quasi-steady-state method for measuring the thermal conductivity of objects can serve as a physical innovation experiment for undergraduate students majoring in physics-related fields, helping college students to master the principles of thermal conductivity measurement and the analysis methods of systematic errors.

Key words thermal conductivity; heat transfer; quasi-steady state; error analysis

导热系数, 又称为热导率, 定义为在稳定传热的条件下单位温度梯度下每单位时间内由单位面

积传递的热量^[1,2]。它作为一个重要的传热学参数, 在材料的热处理^[3]、建筑的热能消耗^[4]等方面

收稿日期: 2023-10-31

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12104009 与 12274095)和广州基础与应用基础研究项目(批准号: 2024A04J0272)资助的课题。

通信作者: 黄颖怡, yyhuang@gdut.edu.cn。

引文格式: 黄运洋, 黄颖怡, 林志萍. 准稳态法测量物体导热系数的误差探究[J]. 物理与工程, 2025, 35(3): 218-222.

Cite this article: HUANG Y Y, HUANG Y Y, LIN Z P. Study on the error of thermal conductivity measurement by quasi-steady state method[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(3): 218-222. (in Chinese)

被广泛讨论。在大学物理的实验教学之中,导热系数的测量也是一个训练实践操作能力的重要内容^[5]。测量物体的导热系数的方法可以分为稳态法^[6]、准稳态法^[7,8]以及瞬态法^[9-11]。其中,准稳态法比稳态法需要的实验时间更短,比瞬态法对设备要求更低。因此,准稳态法测量导热系数十分适合引入大学物理实验教学^[12]。目前对准稳态法研究的一个重要方面,就是关于误差^[13]。准稳态法中一个重要的系统误差来源于忽略热扩散方程解的级数部分。人们知道可以通过增加加热时间来减小这个误差,但加热时间的选取完全依赖于经验^[14]。因此,有必要系统研究加热时间和误差的关系,来合理地选取加热时间。

1 准稳态法测量物体导热系数的传热学模型

考虑如图1所示的模型,在导体一侧施加均匀的指向中心面的热流密度 J ,则平板各处的温度 $T(x, t)$ 将随加热时间 t 而变化。

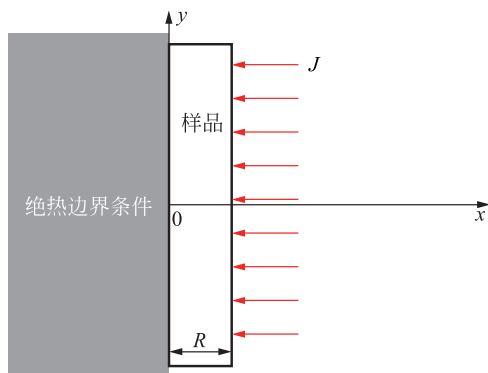


图1 准稳态法的传热学模型

通常在实际操作过程中认为当物体在 y 方向的厚度大于九倍以上的 x 方向的厚度 R 时,模型可以忽略 y 方向上的影响。所以准稳态的模型是一个一维的模型。以样品的绝热边的中心为坐标原点,该一维模型的热传导方程为^[7,16]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial T(R, t)}{\partial x} = \frac{J}{\lambda} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$T(x, 0) = T_0 \quad (4)$$

其中, $\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p}$ 是物体的热扩散系数。式中 λ 为物体的导热系数, C_p 是物体的比热, ρ 为密度。通过数学推导^[12],可得到该热扩散方程组的解为:

$$T(x, t) = T_0 + \frac{J}{\lambda} \left[\frac{\alpha t}{R} - \frac{R^2 - 3x^2}{6R} + R \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{u_n^2} \cos\left(u_n \frac{x}{R}\right) e^{-u_n^2 F_0} \right] \quad (5)$$

其中, $u_n = n\pi, n=1, 2, 3, \dots$ 。 F_0 是一个时间 t 的函数

$$F_0 = \frac{\alpha t}{R^2} \quad (6)$$

在后面讨论不同 F_0 取值对误差的影响时,可以把它看成变量。

为了方便后面的讨论,将式(5)分为两部分讨论,它们分别是级数部分 $\frac{J}{\lambda} f(x, F_0)$ 和非级数部分 $g(x)$ 。其中, $f(x, F_0)$ 函数为:

$$f(x, F_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{u_n^2} \cos\left(u_n \frac{x}{R}\right) e^{-u_n^2 F_0} \quad (7)$$

而 $g(x)$ 不含 F_0

$$g(x) = \frac{J}{\lambda} \left(\frac{\alpha t}{R} - \frac{R^2 - 3x^2}{6R} \right) \quad (8)$$

观察式(5),不难发现其中的级数部分随着时间的增加而减小,且这种减小是以 e^x 形式的减小。指数中的 F_0 与加热时间有关。随着加热时间的增加, F_0 也将增加,那么级数部分对整体的影响呈指数级减弱。通常认为当 $F_0 > 0.5$ 时,式(5)可以化为:

$$T(x, t) = T_0 + \frac{JR}{\lambda} \left(\frac{\alpha t}{R^2} + \frac{x^2}{2R^2} - \frac{1}{6} \right) \quad (9)$$

化简后的式子中 x 与 t 没有耦合,所以这时物体各处的温度升高速率与位置 x 无关。这种温度变化的情况被称为准稳态。结合测量 $x=0$ 处与 $x=R$ 处的温度差 ΔT ,得到一个计算导热系数的公式:

$$\lambda = \frac{JR}{2\Delta T} \quad (10)$$

这就是常规准稳态的导热系数公式。然而这个公式的推导过程中,忽略式(5)的级数部分将引入系统误差。

2 考虑级数部分的导热系数结果减小

准稳态法的系统误差主要来源于忽略了级数部分所造成的误差,现在分析级数部分对导热系数结果的影响。

考虑了级数部分后,导热系数应该为:

$$\lambda_1 = \frac{JR}{2\Delta T} + \frac{JR}{\Delta T} [f(R, F_0) - f(0, F_0)] \quad (11)$$

可以看出,式(11)与式(10)相比增加了 $\frac{JR}{\Delta T} \cdot [f(R, F_0) - f(0, F_0)]$ 一项。对于 $f(x, F_0)$, 不同位置的值由余弦函数决定,可以得出:

$$f(R, F_0) - f(0, F_0) = \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n - 1] \frac{2}{u_n^2} e^{-u_n^2 F_0} < 0 \quad (12)$$

可以看出式(12)的奇数项都小于零,偶数项都为零,所以式(12)中的级数和为零。我们可以得到结论:考虑级数部分的导热系数计算公式得到的导热系数将小于通过式(10)计算得到的导热系数。

3 修正后的导热系数公式

在本章节,将讨论固定 F_0 时,级数部分对导热系数的影响,并计算导热系数的相对误差。

一方面,在固定 F_0 下,观察式(5)中的级数部分。 $f(x, F_0)$ 函数是关于 $\left(\frac{R}{2}, 0\right)$ 点中心对称的。它满足:

$$f\left(-x + \frac{R}{2}\right) = -f\left(x + \frac{R}{2}\right) \quad (13)$$

同时,图2数值模拟的结果也可以验证我们的想法。

根据 $f(x, F_0)$ 的中心对称性,我们可以进一步化简式(11)来表示考虑级数部分的导热系数。准稳态的误差是因为忽略了级数部分所造成的误差,同时我们计算导热系数时用的也是这 $x=0$ 和 $x=R$ 处的温度,在讨论忽略级数部分所造成的导热系数计算误差时将选取 $x=0$ 和 $x=R$ 处作为讨论误差的参考位置。根据 $f(x, F_0)$ 中心对称,所以计算误差时只需要选取一个位置即可,那么

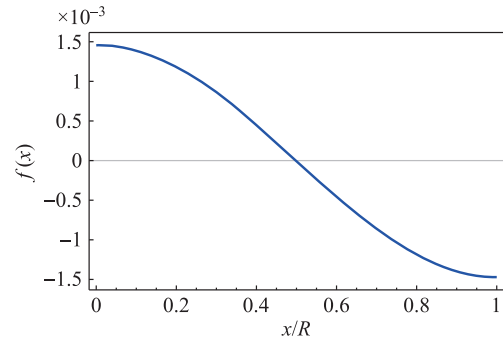


图2 $F_0=0.5$ 时, $f(x, F_0)$ 随 x 变化图。在求解级数部分时我们计算到级数的第24阶,级数部分通常在第5阶左右收敛,只计算到24阶所造成的误差并不会影响我们的结论,且24阶满足 $f(x, F_0)$ 中绝大多数的参数收敛条件

最终修正后的导热系数计算公式为:

$$\lambda_2 = \frac{JR}{\Delta T} \left[\frac{1}{2} + 2f(R, F_0) \right] \quad (14)$$

4 F_0 与误差的关系

从式(14)可以看出,修正过后的表达式中位置项 x 和时间项 t 是耦合在一起的,这也意味着计算导热系数的公式将随着时间的改变而改变。基于此我们要将其与修正前的式(10)所计算出来的导热系数相比较,来分析常规准稳态法公式的误差,需要固定含时的 F_0 来看误差(见表1)。

我们用 δ 来代表误差,它的定义是:

$$\delta = \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} - 1 \right) \times 100\% \quad (15)$$

它表示的是我们通过式(10)所得到的导热系数与式(14)所得到导热系数之间的差值占式(14)所得到导热系数的比率。通过绘制当 F_0 取不同值时 δ 的大小得到了图3。

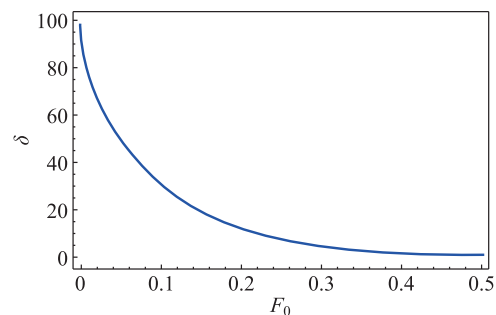


图3 F_0 取不同值时 δ (式(15))的大小。(T_1 取到24阶)

从图3看出,当 F_0 等于0时,因为省略级数

部分而造成的误差量级几乎和真实导热系数的值相同。随着 F_0 的增加,误差也呈指数级递减。当 F_0 等于 0.5 时省略级数部分所造成的误差已经小于 1%,这个结论符合其他人对于准稳态的研究^[2]。而当 F_0 等于 0.3 时,误差也仍然小于 5%。

我们进一步将 F_0 取不同值时得到的 δ 制成了表 1。

表 1 F_0 取不同值时 δ 的具体大小

F_0	$\delta/\%$	F_0	$\delta/\%$
0.5	0.58	0.25	6.87
0.45	0.99	0.20	11.25
0.4	1.56	0.15	18.40
0.35	2.56	0.10	30.20
0.3	4.19	0.050	49.50

5 加热时间与误差的关系

实验设计的一个重要方面就是实验时间的合理选取。在准稳态法实验中, F_0 是实验时间 t 的函数。从式(6)可以看出减小 F_0 可以减少实验所需的时间。所以为了帮助实验者根据不同情况平衡误差水平和时间成本,本文提供了在不同误差水平下,不同的 F_0 的取值相对于 $F_0=0.5$ 时能够节省的时间。我们取

$$\beta = \frac{0.5 - F_0}{0.5} \times 100\% \quad (16)$$

β 表示的是 F_0 取到不同值时,实验节省的时间相比于 F_0 取 0.5 时实验所需的时间占 F_0 取 0.5 时实验所需时间的百分比。

绘制 β 的图像,结果如图 4 所示

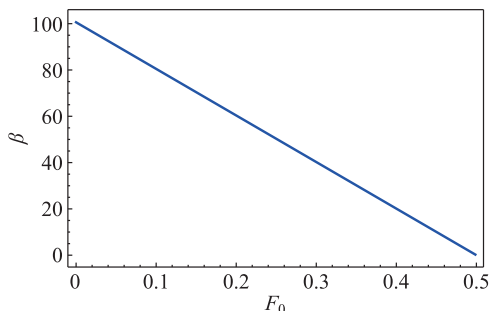


图 4 F_0 取不同值时 β (式(16))的取值情况

随着 F_0 的减小,节省的时间将更多。当 $F_0=0.4$ 时可以节省 10%的时间,而因为 F_0 的减小而

造成的误差仍然在 2% 以下,而当 $F_0=0.3$ 则能够省下 20% 的时间且误差将仍然小于 5%。

为了能够给实验的操作者提供一些具体的参考,本文选取了不同的材料参数代入式(6)中计算达到准稳态的状态所需要的时间。表 2 分别列出了 $F_0=0.4, 0.45, 0.5$ 下,不同材料在厚度为 5cm 的实验时间。

表 2 在厚度为 5cm 的情况下,不同材料在选取不同 F_0 时实验所需要的具体时间(单位为秒)

材料	$\alpha/(\text{cm}^2/\text{s})$	$F_0=0.5$	$F_0=0.45$	$F_0=0.4$
铜	1.11	11.36	10.27	9.09
硅	0.88	14.20	12.78	11.36
6061-T6 铝合金	0.64	19.53	17.57	16.62
锡	0.4	31.25	28.12	25
铁	0.23	54.34	48.91	43.47
碳钢	0.18	69.44	62.5	55.55
不锈钢	0.042	297.61	297.85	238.09
冰	0.0115	1086.962	978.26	869.56
普通砖	0.0052	403.85	2163.42	1923.0
玻璃	0.0034	3676.47	3308.82	2941.18
尼龙	0.0009	13888.9	12500	11111.1
木材	0.00082	15243.96	13719.5	12195.1

注:表中材料的热扩散系数均来自 <https://www.engineersedge.com>。

结合表 1 和表 2,我们可以找到不同相对不确定度要求下,具体材料所需的实验时间。

6 结论

忽略级数项所造成的系统误差是准稳态测量物体导热系数的主要误差来源。本文通过解析分析和数值模拟讨论了一维的传热模型下准稳态法级数项中时间参数 F_0 取值对误差的影响。提出了一个考虑边界级数项的导热系数测量公式来避免这一系统误差。这个公式虽然不能解析求解,但能够在收敛情况下通过数值模拟去计算,通过系统研究 F_0 与误差的关系,给出了在不同误差要求下,加热所需的时间。在误差要求不高的情况下,可以减少 F_0 的取值,那么实验所需的时间将会减少许多。尤其是在测量低导热系数材料或是低热扩散系数材料时这种减少将会比较明显。我

们的探究能够为科研测试与实验教学中,针对不同材料,合理选取实验时间以及进行系统误差分析提供一个参考。

参 考 文 献

- [1] 雷柯夫. 热传导理论[M]. 裘烈钧,丁履德,译. 北京: 高等教育出版社, 1959.
LEI K F. Heat conduction theory[M]. QIU L J, DING L D, Trans. Beijing: Higher Education Press, 1959. (in Chinese)
- [2] 陶文铨. 传热学[M]. 4版. 北京: 高等教育出版社, 2006.
TAO W X. Teat transfer theory[M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese)
- [3] 张继涛, 赵丽民, 巩笑源. 反演导热系数的计算方法在热处理工艺的应用[J]. 铸造设备与工艺, 2020(3): 33-39.
ZHANG J T, ZHAO L M, GONG X Y. Application of calculation method for inversion of thermal conductivity in heat treatment process[J]. Foundry Equipment and Technology, 2020(3): 33-39. (in Chinese)
- [4] 刘大龙, 赵辉辉, 刘向梅, 等. 不同含水率下生土导热系数测试及对建筑能耗的影响[J]. 土木建筑与环境工程, 2017, 39(1): 20-25.
LIU D L, ZHAO H H, LIU X M, et al. Measurement of thermal conductivity of raw soil with different moisture content and its influence on building energy consumption[J]. Civil Construction and Environmental Engineering, 2017, 39(1): 20-25. (in Chinese)
- [5] 刘跃, 张志津. 大学物理实验[M]. 2版. 北京: 北京大学出版社, 2010: 225-228.
LIU Y, ZHANG Z J. College physics experiment[M]. 2nd ed. Beijing: Peking University Press, 2010. (in Chinese)
- [6] 秦小晋, 黄巍, 晏小娟, 等. 基于稳态法的界面材料导热系数测试研究[J]. 智能制造, 2024(3).
QING X J, HUANG W, YAN X J, et al. Research on thermal conductivity testing of interface materials based on steady state method in rubber and plastic technology and equipment[J]. Intelligent manufacturing, 2024 (3). (in Chinese)
- [7] 刘世杰, 吴鹏章, 王梦蛟, 等. 一种基于稳态热流法的导热系数测定仪器及方法[J]. 橡塑技术与装备, 2017, 43(17).
LIU S J, WU P Z, WANG M J, et al. A thermal conductivity measurement instrument and method based on steady-state heat flux method[J]. Rubber and Plastic Technology and Equipment, 2017, 43(17). (in Chinese)
- [8] 陈昭栋, 舒维芬, 邝向军. 热导率瞬态测量的数据处理[J]. 物理实验, 2000, 20(3): 6-8.
CHENG Z D, SHU W F, KUANG X J. Data processing for thermal conductivity transient measurements[J]. Physics experiments, 2000, 20(3): 6-8. (in Chinese)
- [9] PARKER W J, JENKINS R J, BUTLER C P, et al. Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity, and thermal conductivity[J]. Journal of applied physics, 1961, 32(9): 1679-1684.
- [10] LIN B, BAN H, LI C, et al. Method for obtaining thermal conductivity from modified laser flash measurement [C]. ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition: Vol. 42223. 2005: 725-730.
- [11] 王浩宇, 谢静超, 王未等. 热线法测量相变构件导热系数的适用性研究[J]. 新型建筑材料. 2019, 46(10).
WANG H Y, XIE J C, WANG W et al. Study on the applicability of intelligent manufacturing hotline method for measuring the thermal conductivity of phase change components[J]. New building materials, 2019, 46(10). (in Chinese)
- [12] 周厚兵, 张欣蕊, 赵子珍, 等. 准稳态法在大学物理实验教学科研中的应用[J]. 广西物理, 2017, 38(1): 44-47.
ZHOU H B, ZHANG X R, ZHAO Z Z, et al. Application of quasi-steady state method in university physics experiment teaching and scientific research[J]. Guangxi Physics, 2017, 38(1): 44-47. (in Chinese)
- [13] 史韩朝, 徐崇, 孙家军. “数形结合”——测量及不确定度教学模式的改革与研究[J]. 大学物理实验, 2024, 37(1).
SHI W C, XU C, SHUN J J. The reform and research of the teaching mode of measurement and uncertainty “Combining Numbers and Shapes”[J]. College Physics Experiment, 2024, 37(1). (in Chinese)
- [14] 任鸿睿, 何海龙, 纽春萍等. 基于准稳态法的热电材料变物性参数表征测量方法[J]. 电工技术学报, 2024, 39(17).
RENG H R, HE H L, NUI C P, et al. A measurement method for characterization of thermal and electrical material properties based on quasi steady state method[J]. Transaction of China Electrotechnical Society, 2024, 39(17). (in Chinese)
- [15] 孟勇. Maple 在大学物理教学中的应用[J]. 物理与工程, 2022, 32(6): 87-103.
MENG Y. The application of maple in college physics teaching[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(6): 87-103. (in Chinese)
- [16] CARLSLAW H, JAEGER J. Conduction of heat in solids [Z]. Oxford, 2016: 25-52.