

摆轮受迫振动的做功分析

李奇骏^{1,2} 吴秀梅¹

(¹ 东南大学物理学院, 江苏 南京 211189; ² 东南大学自动化学院, 江苏 南京 211189)

摘 要 本文对摆轮受迫振动的做功与能量变化进行了研究, 推导出阻尼力矩、弹性力矩和驱动力矩在 $1/4$ 周期内的做功以及其共振平衡条件。接着从能量的角度, 研究了摆轮转动的动能平均值和势能平均值的大小与振动频率的关系。最后对阻尼力矩和驱动力矩的瞬时功率进行了分析, 并从振幅衰减的角度阐释了摆轮振幅的变化趋势。本文为分析受迫振动过程中力矩做功以及能量转化情况, 提供了可供参考的理论研究。

关键词 受迫振动; 功能关系; 振幅衰减

WORK ANALYSIS AND EXPERIMENTAL DATA PROCESSING OF PENDULUM WHEEL FORCED VIBRATION

LI Qijun^{1,2} WU Xiumei¹

(¹ School of Physics, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 211189; ² School of Automation, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 211189)

Abstract This paper investigates the work and energy changes in the forced vibration of a pendulum, deriving the work done by damping torque, elastic torque, and driving torque within a quarter cycle, as well as their resonance equilibrium conditions. Subsequently, from an energy perspective, the relationship between the average values of the pendulum's kinetic and potential energy and the vibration frequency is studied. Finally, the instantaneous power of the damping torque and driving torque is analyzed, and the trend of the pendulum's amplitude change is explained from the perspective of amplitude decay. This paper provides a theoretical reference for analyzing the work done by torques and the energy transformation during the forced vibration process.

Key words impacted vibration; functional relationship; amplitude fading

受迫振动是大学物理实验课程中一个重要的内容, 受到很多研究学者的关注。对于受迫振动中做功和能量转换方面的研究, 现有文献虽然涉及对速度共振频率下作用力做功特点的研究, 受迫振动中的能量转换情况的讨论^[1]、位移共振条件下的能量特点^[2]、受迫振动的振幅与功和能量的关系^[3]、受迫振动中能量的瞬时转换关系^[4]、线

性系统发生共振的条件以及特征^[5]、利用图解法对于受迫振动系统进行定量分析^[6]、使用 Green 函数分析受迫振动系统^[7]、利用线性变换求受迫振动系统稳态解^[8]、受迫振动相关问题的研究^[9]和利用波尔共振仪研究受迫振动的幅频特性和相频特性^[10]等方面的内容, 但对于摆轮受迫振动系统做功的详细分析, 以及振动过程的能量改变等

收稿日期: 2023-12-06

基金项目: 2020 年中央高校教育教学改革专项基金(5207022103A)。

通信作者: 吴秀梅, 326302707@qq.com。

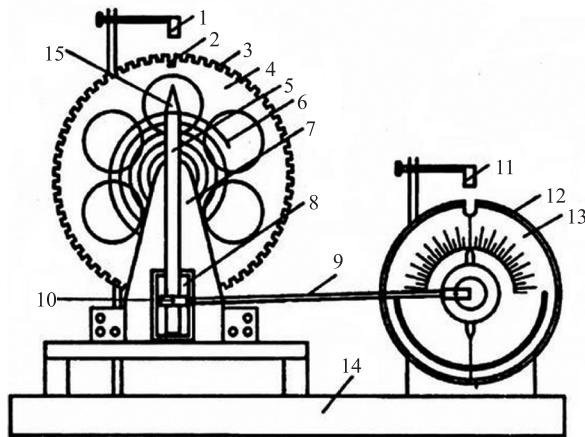
引文格式: 李奇骏, 吴秀梅. 摆轮受迫振动的做功分析[J]. 物理与工程, 2025, 35(3): 208-213.

Cite this article: LI Q J, WU X M. Work analysis and experimental data processing of pendulum wheel forced vibration[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(3): 208-213. (in Chinese)

方面的研究尚少。因此,本文将以波尔共振仪为例,详细分析摆轮受迫振动过程中,三种力矩包括阻力力矩、弹性力矩和驱动力力矩做功,及其合力矩做功的平衡条件,同时对受迫振动的过程中的功率和能量的变化也进行了相应的分析。本文为加深理解受迫振动过程中的做功情况,以及功能转换情况,提供了一定的理论基础和探索方向。

1 实验原理

波尔共振仪实验采用的波尔共振仪由振动仪与电器控制箱两部分组成。外形结构如图1所示,铜质圆形摆轮安装在机架上,弹簧的一端与摆轮的轴相连,另一端可固定在机架支柱上,铜质圆形摆轮受迫振动系统作受迫振动时受到三种力矩作用:蜗卷弹簧提供的弹性力矩 $-k\theta$,轴承、空气和电磁阻尼力矩 $-b \frac{d\theta}{dt}$ 电动机偏心系统经卷簧的外夹持端提供的驱动力矩 $M=M_0 \cos \omega t$ 。^[1]



1—光电门;2—长凹槽;3—短凹槽;4—摆轮;5—摇杆;6—蜗卷弹簧;7—支承架;8—阻尼线圈;9—连杆;10—摇杆调节螺丝;11—光电门;12—角度盘;13—有机玻璃转盘;14—底座;15—外端夹持螺钉

图1 波尔共振仪

设摆轮在弹性力矩为 $-k\theta$ 、阻尼力矩为 $-b \frac{d\theta}{dt}$ 和驱动力矩为 $M_0 \cos \omega t$ 的作用下作受迫运动。 ω_0 为系统固有频率,令 $\omega_0^2 = \frac{k}{J}$, $2\delta = \frac{b}{J}$, $m = \frac{M_0}{J}$ 。

其动力学方程为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\delta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = m \cos \omega t \quad (1)$$

解得稳态以后振动方程

$$\theta_b = \frac{m}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \quad (2)$$

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{-2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) \quad (3)$$

$$\theta = \theta_b \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (4)$$

下面计算阻尼力矩以及驱动力矩和弹性力矩所做的功。

2 三种力矩做功

2.1 三种力矩做功

目前对于弹簧受迫振动系统的作用力做功分析虽已受到关注^[11],但摆轮系统的力矩平衡情况与做功分析仍有欠缺。考虑到摆轮受迫振动的周期性和对称性,接下来讨论振子系统从 $t=0$ 到 $t=T/4$ 时间内,即从 $\theta = \theta_b \cos(\varphi_0)$ 状态到 $\theta = \theta_b \cos(\pi/2 + \varphi_0)$ 状态内,阻尼力矩、弹性力矩、驱动力矩及其合力矩所做的功。

2.1.1 阻尼力矩做功

由式(4)得阻尼力矩在 $1/4$ 周期内做功记为 W_f ,则

$$\begin{aligned} W_f &= \int_{\theta_b \cos \varphi_0}^{\theta_b \cos(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})} -b \frac{d\theta}{dt} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} -b\theta_b^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) dt \end{aligned} \quad (5)$$

由 $2\delta = b/J$ 可得

$$W_f = -\frac{1}{2} \delta J \omega \theta_b^2 [\pi + 2\sin(2\varphi_0)] \quad (6)$$

2.1.2 弹性力矩做功

弹性力矩相似于弹簧受迫振动中的回复力,摆轮摆动角度越大时,弹性力矩做功越大,弹性力矩 $1/4$ 周期内做功记为 W_E ,有

$$\begin{aligned} W_E &= \int_{\theta_b \cos(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}^{\theta_b \cos \varphi_0} -k\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} k\theta_b^2 \omega \cos(\omega t + \varphi_0) \sin(\omega t + \varphi_0) dt \end{aligned} \quad (7)$$

由于系统固有频率 ω_0 满足 $\omega_0^2 = k/J$,结合式(7)可得

$$\begin{aligned} W_E &= \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \frac{1}{2} \omega_0^2 J \theta_b^2 \sin(2\omega t + 2\varphi_0) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \frac{1}{2} \omega_0^2 J \theta_b^2 \cos(2\varphi_0) dt \\ &= \frac{1}{2} \omega_0^2 J \theta_b^2 \cos(2\varphi_0) \end{aligned} \quad (8)$$

2.1.3 驱动力矩做功

驱动力矩由外力提供,决定了摆轮作受迫振动的稳态解。驱动力矩在 1/4 周期内做功记为 W_M ,有

$$\begin{aligned} W_M &= \int_{\theta_b \cos \varphi_0}^{\theta_b \cos(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})} M_0 \cos(\omega t) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} -M_0 \omega \cos(\omega t) \theta_b \sin(\omega t + \varphi_0) dt \quad (9) \end{aligned}$$

由 $m = M_0/J$, 结合式(9)得

$$\begin{aligned} W_M &= \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} -mJ\omega \cos(\omega t) \theta_b \sin(\omega t + \varphi_0) dt \\ &= -\frac{1}{4}mJ\theta_b [\pi \sin(\varphi_0) + 2\cos(\varphi_0)] \quad (10) \end{aligned}$$

设置参数质量为 1kg,驱动力矩为 4N·m,阻尼系数 $\delta = 1\text{N}/(\text{kg} \cdot \text{m/s})$,以力矩做功为 y 轴,角频率 ω 为 x 轴,三种力矩及其合力矩做功与角频率的关系如图 2 所示。

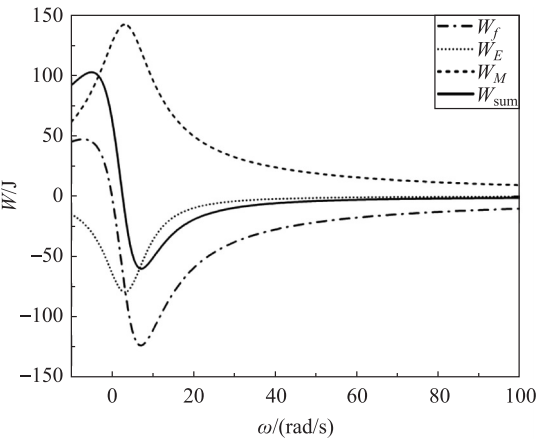


图2 三种力矩做功关系曲线

从图 2 可见,摆轮在 1/4 周期内的做功情况不仅与三种力矩做功有关,也与摆轮振动的初相位有关。摆轮在克服阻力做功输出能量的同时,从驱动力矩做功中输入能量。当从驱动力输入的能量,等于摆轮克服阻力做功输出的能量时,系统

达到动态平衡,在不考虑外界因素的影响下,总能量保持不变,理论上振幅保持不变,作等幅振动。但实际中,摆轮振动时,会受到阻力的影响,比如空气阻力、系统耗散力等。使得摆轮要克服阻力做功,导致其振幅会逐渐减小。如表 1 所示,摆轮作自由振动时,受到空气阻力,系统耗散力等影响,使其振幅越来越小。

2.1.4 合力矩做功分析

在 1/4 周期内合力矩做功,记为 W_{sum} ,由式(6)、式(8)、式(10)得出 1/4 周期合力做功表达如下

$$\begin{aligned} W_{\text{sum}} &= W_f + W_E + W_M \\ &= \frac{m^2 J}{8\delta\omega_0} \left(-\pi - 2\sin(2\varphi_0) + \frac{\cos(2\varphi_0)}{\delta} - \right. \\ &\quad \left. 2\cos(\varphi_0) - \pi\sin(\varphi_0) \right) \quad (11) \end{aligned}$$

由式(11)设置如下参数:质量为 1kg,驱动力矩为 4N·m,阻尼系数 $\delta = 1\text{N}/(\text{kg} \cdot \text{m/s})$ 。则可绘制合力矩做功与阻尼系数及初相位的函数关系图像如图 3 所示。

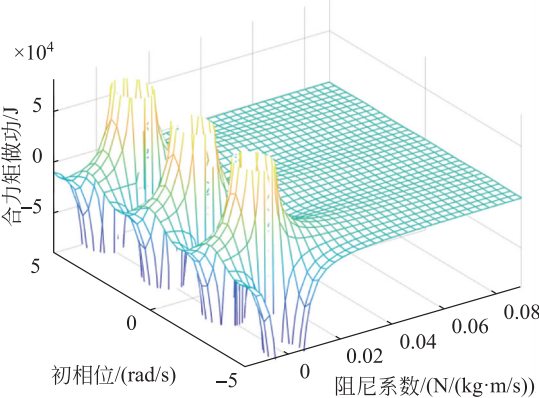


图3 合力矩做功关系图像

从图 3 可见,摆轮达到共振时的做功由系统的阻尼系数、驱动力矩和初相位共同决定。在初相位的变化方向上,合力矩做功呈现明显的周期性变化。阻尼系数变化方向上,阻尼系数越小,越

表 1 自由振动数据记录

摆轮振幅 $\theta/(^\circ)$	156.0	152.5	149.0	142.0	136.0	128.0	123.5	118.0
周期 T/s	1.6739	1.6735	1.6731	1.6725	1.6719	1.6709	1.6705	1.6697
摆轮振幅 $\theta/(^\circ)$	112.0	105.0	101.5	96.0	92.5	86.0	82.0	77.5
周期 T/s	1.6693	1.6686	1.6682	1.6677	1.6672	1.6667	1.6661	1.6656
摆轮振幅 $\theta/(^\circ)$	75.0	71.0	68.0	65.0	60.0	56.5	52.5	45.0
周期 T/s	1.6653	1.6649	1.6645	1.6639	1.6634	1.6629	1.6627	1.6618

正向趋近于0,则合力矩做功绝对值越大。

下面讨论当摆轮受迫振动达到共振时,阻尼力矩、弹性力矩和驱动力矩做功在1/4周期内达到平衡的条件。达到平衡时需满足 $W_{\text{sum}} = 0$, 则有

$$-\pi - 2\sin(2\varphi_0) + \frac{\cos(2\varphi_0)}{\delta} - 2\cos(\varphi_0) - \pi\sin(\varphi_0) = 0 \quad (12)$$

由式(12)可见,平衡条件只与初相位 φ_0 和阻尼系数 δ 有关。该方程式又反过来验证了图3中合力矩做功与初相位 φ_0 和阻尼系数存在着密切关系。

3 能量与功率关系分析

3.1 能量平均值分析

在受迫振动的一个周期内,摆轮转动动能平均值 $\overline{E_k}$ 计算结果如下

$$\begin{aligned} \overline{E_k} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} J \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 dt \\ &= \frac{J\omega^2\theta_b^2}{2} \int_0^T \frac{1}{T} \sin^2(\omega t + \varphi_0) dt = \frac{J}{4} \omega^2 \theta_b^2 \end{aligned} \quad (13)$$

同理得摆轮转动势能平均值 $\overline{E_p}$ 值

$$\overline{E_p} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} k \theta^2 dt = \frac{J}{4} \omega_0^2 \theta_b^2 \quad (14)$$

由式(13)、式(14)得 $\overline{E_k}/\overline{E_p} = \omega^2/\omega_0^2$, 比较驱动力频率 ω 和摆轮无阻尼自由振动时的频率 ω_0 的大小,可得

$$\begin{aligned} \omega/\omega_0 > 1 \text{ 时}, \overline{E_k} > \overline{E_p}; \omega/\omega_0 < 1 \text{ 时}, \\ \overline{E_k} < \overline{E_p}; \omega/\omega_0 = 1 \text{ 时}, \overline{E_k} = \overline{E_p} \end{aligned} \quad (15)$$

设置参数质量为1kg,驱动力矩为4N·m,阻尼系数 $\delta = 1\text{N}/(\text{kg} \cdot \text{m/s})$,根据式(13)及式(14),得出一个周期内动能、势能平均值的变化曲线如图4所示。

从图4中可见,在一个周期内,平均动能和平均势能均在 $\omega = \omega_0$ 时达到最大值,即在一个周期内,当驱动力的频率与摆轮固有振动频率达到一致时,其能量平均值达到最大,在实验中表现为此时($\omega/\omega_0 = 1$)摆轮振幅 θ 达到最大值即共振。当驱动力的频率与摆轮固有振动频率比值越大($\omega/\omega_0 > 1$)或越小($\omega/\omega_0 < 1$),即振动越不同步,则一个周期内,其动能和势能的平均值越小,则实

验中表现为振幅值也越小,如图5所示。

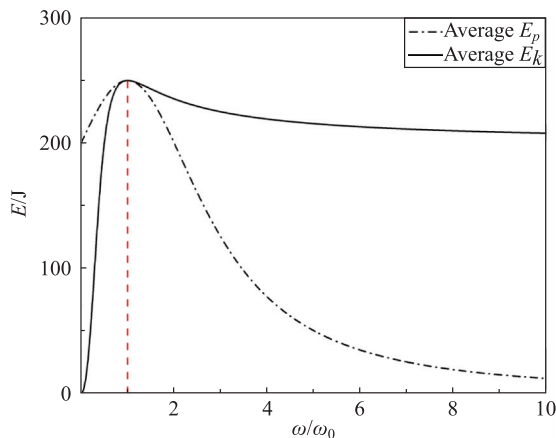


图4 动能、势能平均值的变化曲线

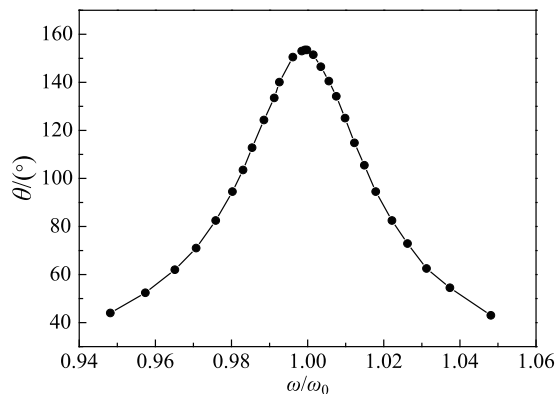


图5 摆轮受迫振动的幅频曲线

3.2 瞬时功率及振幅分析

考虑到弹性力矩的周期对称性,在一个周期内做功为0。因此,接下来主要讨论驱动力矩和阻力矩的功率随时间变化的规律,从而分析摆轮在周期性振动过程中能量转化。驱动力矩的功率记为 P_M

$$P_M = M \frac{d\theta}{dt} = -M_0 \cos(\omega t) \omega \theta_b \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (16)$$

从式(16)可见,在不同的时刻,此功率可能为正也可能为负,即驱动力有时向摆轮提供能量,有时又会消耗摆轮的能量。阻尼力矩的功率记为 P_f

$$P_f = -b \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -b \theta_b^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \quad (17)$$

从式(17)可见,阻尼力矩功率小于0,处于消

耗摆轮能量的状态。由式(16)和式(17)可以求得驱动力矩和阻尼力矩的功率振幅之比为

$$\frac{M_0 \omega \theta_b}{b \omega^2 \theta_b^2} = \frac{M_0}{b \omega \theta_b} \quad (18)$$

由 $2\delta = b/J$, $m = M_0/J$, 可得

$$\begin{aligned} \frac{M_0}{b \omega \theta_b} &= \frac{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2} M_0 J}{M_0 2\delta J} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\delta \omega}\right)^2 + 1} \geq 1 \end{aligned} \quad (19)$$

也就是说,一般情况下驱动力矩功率的幅值,比阻尼力矩功率的幅值大。只有当 $\omega = \omega_0$ 时两者才相等。在任意时刻 t , 摆轮获得的净功率为

$$\begin{aligned} P &= P_M + P_f \\ &= -M_0 \omega \theta_b \cos(\omega t) \sin(\omega t + \varphi_0) - \\ &\quad b \theta_b^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (20)$$

当 $\varphi_0 = \pi/3$ 时,共振条件下驱动力矩功率、阻尼力矩功率和净功率与时间 t 关系如图6所示。

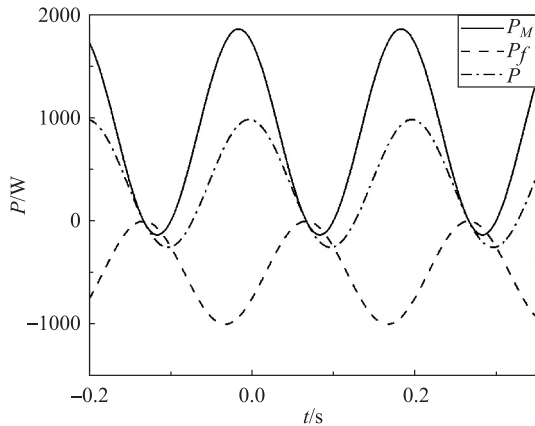


图6 力矩功率与时间关系曲线

从图6中可以看出,驱动力矩功率一直在进行正负交替的变化,而阻尼力矩一直小于0,摆轮系统的能量得失和转化情况完全取决于式(20)的正负,净功率也在不断进行正负交替的变化,这反映了摆轮受迫振动时,系统一直在进行不同形式的能量转化。

由式(16)及式(17)可知,驱动功率和阻尼功率以相同的角速度 2ω 变化,因此合成的净功率也保持同频率变化。可见功能关系变化频率是驱动力矩变化频率的2倍,随着净功率的变化,系统的能量在转动动能和势能之间交替,最终达到稳态。由此可得,摆轮受迫振动从 $t=0$ 开始到任意 t 时间内所做的功为

$$\begin{aligned} W_{\text{sum}} - W_0 &= \int_0^t (P_M + P_f) dt = \int_0^t P dt \\ &= -\frac{M_0}{4} \theta_b (\cos(\varphi_0) - \cos(2\omega t + \varphi_0)) - \\ &\quad \frac{M_0}{2} \omega \theta_b \sin(\varphi_0) t - \frac{b \theta_b^2 \omega^2 t}{2} + \\ &\quad \frac{b \theta_b^2 \omega^2}{4} \sin(2\omega t + 2\varphi_0) \end{aligned} \quad (21)$$

随着总能量的不断变化,摆轮的受迫振动频率,逐渐趋近于驱动力矩变化频率,即不断趋向于稳态解。摆轮受迫振动系统通解为

$$\theta = \theta_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_s t + \varphi_s) + \theta_b \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (22)$$

$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (23)$$

摆轮的驱动力矩和阻尼力矩做功,与其关联的一个影响为振动幅值 θ 的变化。从式(22)可见,随着时间的增加,第一项逐渐趋近为0,衰减的速度仅仅由阻尼系数决定,阻尼系数越大,阻尼力矩功率越大,摆轮受迫振动系统达到稳态的时间越短。而驱动力矩的大小,影响着稳态时摆轮振动幅值的大小。用 $|\theta|$ 表示幅值,则有

$$|\theta| = \sqrt{\theta_0^2 e^{-2\delta t} + \theta_b^2} \quad (24)$$

设置如下参数,初始振动幅值 $\theta_0 = 1 \text{ rad}$, $\delta = 0.03 \text{ N/(kg} \cdot \text{m/s)}$, $\omega = \omega_0$, $\theta_b = 0.5 \text{ rad}$,绘制出摆动角度幅值变化的极坐标曲线,如图7所示。

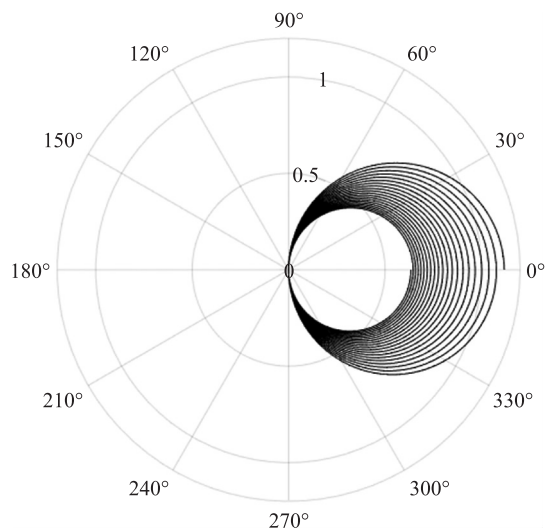


图7 摆动角度幅值变化极坐标曲线

从图7中可以看出摆动角度的幅值随着时间的增加逐渐减小,原因是幅值部分中 $\theta_0^2 e^{-2\delta t}$ 项逐渐衰减,最终得到稳定的幅值 θ_b 为 0.5 rad ,即

只有稳态解幅值最终保留下来。从功能关系的角度分析,摆轮在阻尼力矩做功下总能量不断减少,摆轮在驱动力矩做功的影响下振幅逐渐稳定。从数学表达式角度分析,摆轮振动的通解中,自由振动分量是指数函数形式,由指数函数的特性, δ 的数值越大衰减速度越快,因此达到稳态的时间越短。在时间增大到一定程度时衰减的速度也逐渐减缓。最终当自由振动分量 $\theta_0^2 e^{-2\delta t}$ 衰减至趋近于0,摆轮的摆动角幅值也逐渐衰减至 θ_b ,受迫振动系统达到稳定状态。

4 结语

本文从功能关系的角度,计算出影响摆轮受迫振动的三种力矩在 $1/4$ 周期做功的数学表述形式,同时依据曲线的变化对于摆轮运动的能量转换进行了分析。接着本文对三种力矩做功的平衡条件作出了详细的推导与论述,也对阻尼力矩和驱动力矩的瞬时功率进行了计算,得出任意时间内所做功的表达式。同时在共振条件作出了功率与时间的曲线并进行关系分析,最后从受迫振动系统通解出发分析得出做功、时间与摆轮振动幅值衰减的关系。

参 考 文 献

- [1] 白守仁. 受迫振动中的能量转换[J]. 大学物理, 1984, 3(6): 19-22.
BAI S R. Energy Conversion in Forced Vibration[J]. College Physics, 1984, 3(6): 19-22. (in Chinese)
- [2] 钱天虹. 稳定受迫振动中的能量转换[J]. 大学物理, 1999, 18(1): 22-24.
QIAN T H. The energy conversion in a stable forced vibration[J]. College Physics, 1999, 18(1): 22-24. (in Chinese)
- [3] 陶湘. 从功能关系讨论受迫振动的振幅[J]. 大学物理, 1994, 13(11): 5-8.
TAO X. Discussing the amplitude of forced vibration from the perspective of functional relationships[J]. College Physics, 1994, 13(11): 5-8. (in Chinese)
- [4] 朱鼎玉. 稳态受迫振动的能量[J]. 大学物理, 1991(1): 38-39.
ZHU D Y. The energy of steady-state forced vibration[J]. College Physics, 1991(1): 38-39. (in Chinese)
- [5] 马学坤. 线性受迫阻尼振动发生共振的条件及特征[J]. 大学物理, 2001, 20(2): 3-3.
MA X K. Conditions and characteristics of resonance produced by linear forced damped oscillation[J]. College Physics, 2001, 20(2): 3-3. (in Chinese)
- [6] 何学敏, 任银娟, 毛巍威, 等. 图解法用于受迫振动实验的定量研究[J]. 大学物理实验, 2022, 35(2): 112-116.
HE X M, REN Y J, MAO W W, et al. Graphic method for quantitative study of forced vibration experiment[J]. Physical Experiment of College, 2022, 35(2): 112-116. (in Chinese)
- [7] 赵翔, 孟诗瑶. 基于 Green 函数分析 Euler-Bernoulli 双曲梁系统的受迫振动[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(2): 168-177.
ZHAO X, MENG S Y. Forced vibration of Euler-Bernoulli hyperbolic beam systems based on Green's function analysis[J]. Applied Mathematics & Mechanics, 2023, 44(2): 168-177. (in Chinese)
- [8] 宇文天浩, 郝思洁, 金文涛. 利用线性变换方法求解稳态受迫振动[J]. 大学物理, 2023, 42(3): 37-40.
YUWEN T H, HAO S J, JIN W T. Solving the steady-state forced vibrations using the linear transformation method[J]. College Physics, 2023, 42(3): 37-40. (in Chinese)
- [9] 罗艺豪, 陈宗强, 陈靖, 等. 电磁铁驱动下钢弦的受迫振动的研究[J]. 物理与工程, 2022, 32(5): 87-91.
LUO Y H, CHEN Z Q, CHEN J, et al. Investigation on forced vibration of steel string driven by electromagnet[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(5): 87-91. (in Chinese)
- [10] 朱华泽. 用波尔共振仪研究受迫振动特性[J]. 大学物理实验, 2011, 24(3): 57-60.
ZHU H Z. Research of force vibration characteristics based on Pohl resonator[J]. Physical Experiment of College, 2011, 24(3): 57-60. (in Chinese)
- [11] 王睿博, 王启州, 吴彦旭, 等. 受迫振动中作用力做功的特征分析[J]. 物理通报, 2019(11): 32-34.
WANG R B, WANG Q Z, WU Y X, et al. Some characteristics on damping works in the forced vibration[J]. Physics Bulletin, 2019(11): 32-34. (in Chinese)