

储备池计算在非线性电路实验教学中的应用

戴文娇¹ 颜子翔¹ 高 健¹ 杨胡江¹ 王新刚² 肖井华¹

(¹ 北京邮电大学理学院, 北京 100876; ² 陕西师范大学物理学与信息技术学院, 陕西 西安 710100)

摘 要 在当前推行数智化教育的时代背景下, 如何实现人工智能与大学物理实验教学的有机融合是一个值得关注的问题。为探索这一融合的实践方式, 本研究将一种机器学习方法——储备池计算与非线性电路实验进行结合, 探索其在实际教学场景中的潜在应用。研究表明, RC 方法在对三个电阻值下的两路电压信号进行学习后, 便能准确给出这一非线性电路系统在电阻值连续变化时通向混沌的倍周期分岔道路。利用这一功能, 学生在课堂中不仅能够更快、更深入、更全面地了解复杂非线性电路系统的本质, 还能充分领略到机器学习的强大能力。这一尝试为数智化教育的实践提供了一种可行途径。

关键词 非线性物理实验; 储备池计算; 参数感知; 倍周期分岔图

THE APPLICATION OF RESERVOIR COMPUTING IN NONLINEAR CIRCUIT EXPERIMENTAL TEACHING

DAI Wenjiao¹ YAN Zixiang¹ GAO Jian¹ YANG Hujiang¹ WANG Xingang² XIAO Jinghua¹

(¹ School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876;

² School of Physics and Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an, Shaanxi 710100)

Abstract In the current era of promoting “digital intelligence” education, how to achieve the organic integration of artificial intelligence with university physics experimental teaching is a question worth exploring. To explore practical methods of this integration, this study combines a machine learning method—Reservoir Computing (RC)—with nonlinear circuit experiments to investigate its potential applications in actual teaching scenarios. The research shows that after learning the voltage signals under three different resistor values, the RC method can accurately predict the route to chaos through period-doubling bifurcations as the resistor values change continuously. Utilizing this functionality, students in the classroom can understand the essence of complex nonlinear circuit systems more quickly, deeply, and comprehensively, and fully appreciate the powerful capabilities of machine learning. This attempt provides a viable approach for the practice of “digital intelligence” education.

Key words nonlinear physics experiment; reservoir computing; parameter aware; period-doubling bifurcation diagram

人工智能(Artificial Intelligence, AI)技术的发展标志着现代计算能力进入了一个全新的时

代, 它通过模拟人类的思维模式, 理解行为产生的基本原理, 并开发出新的算法。AI技术的核心目

收稿日期: 2024-07-04

基金项目: 2024 高等学校计算物理课程教学研究项目(JZW-24-JW-06); 2024 年度全国高等学校大学物理改革研究项目(2024PR007); 北京邮电大学重点教改项目(2023D11)。

通信作者: 颜子翔, yanzx@bupt.edu.cn。

引文格式: 戴文娇, 颜子翔, 高健, 等. 储备池计算在非线性电路实验教学中的应用[J]. 物理与工程, 2025, 35(3): 194-200.

Cite this article: DAI W J, YAN Z X, GAO J, et al. The application of reservoir computing in nonlinear circuit experimental teaching[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(3): 194-200. (in Chinese)

标是搭建出具有理解、学习、推理、规划和交互能力的机器,使其能够在不同的情境中作出相应的反应,用以执行复杂的任务。目前,AI 技术中的机器学习、计算机视觉、自然语言处理等算法已在多个实际应用领域取得显著进展,如自动驾驶车辆^[1]、语音识别^[2]和图像识别^[3]等。其中,机器学习算法以其强大的自我学习能力在 AI 领域引起了广泛的关注。它能够不依赖于系统的先验知识,仅通过分析大量数据便获取到其中隐藏的有效信息,并做出有效决策。

AI 技术的出现同样为大学物理实验教学带来新的机遇。随着 AI 时代的到来及“强化现代”概念的提出,一种集成了 AI 技术的物理实验方式——“AI+物理实验”应运而生。将实验内容与人工智能及数智技术相结合,能够实现依靠数据驱动的实验设计、实验过程优化,实验结果预测等多种实用功能,有效提高实验教学的质量和效率,为达成“发展学生的科学思维和创新意识,提升分析和创新能力”这一大学物理实验教学的核心目的提供助力。

非线性系统相关的大学物理实验课程,包括混沌扭摆、非线性电路等,是大学物理实验中的重要组成部分,而传统的教学方式对于非线性系统的处理仍然存在诸多问题。首先,因非线性系统动力学行为的高度敏感性,且实验元件的精度和灵敏度有限,参数调节不当会导致某些实验现象的隐藏。例如,混沌状态中隐藏的周期窗口。所以在实验过程中为了能够看到更全面的现象,需要对参数进行反复调试,拉长了实验周期,使得教学效率低下。并且对于混沌现象来说,倍周期分岔是理解系统在确定性规则下表现出的对初值高度敏感和不可预测的动态行为的一个关键的途径,它是一条通向混沌的典型道路,可以认为是从周期窗口进入混沌状态的一种方式。通过研究系统动力学的分岔图,能够更直观地观察到系统变化的临界点,还能证明系统参数的微小变化可能会导致系统动力学的剧烈变化。但是由于课堂时间有限,且准确呈现倍周期分岔图所需要测量的数据量较多,学生较难在课堂上直观地看到混沌产生的路径。其次,实验数据难免会因为元件之间的摩擦损耗或数据存储精度问题受到噪声的污染,实验设备的功能不完备也可能导致数据的缺失,皆使得理论模型与实际系统之间存在误差。

因此,理论模型虽然能够提供具有一定参考意义的指导,但往往无法完整描述实际系统中的复杂现象。学生无法根据提供的理论模型复现当前的实验结果,这对理解混沌的过程构成了障碍。综上所述,如何在实验过程中感知到原件参数值的变化及当前参数值的大小,并给出有针对性的调节指导意见,如何减少噪声干扰,提高数据的准确性和可靠性,在复杂现象和理论的简化模型之间找到平衡,更加全面地刻画揭示系统的本质规律等,均是非线性物理实验教学亟待突破的问题。传统的重构方法,如最小二乘法等,对实验数据的要求较高,变量的缺失或数据的噪声对数据的处理或理论模型的变换均需要较高的技巧。AI 技术不依赖理论模型的信息,能够通过直接分析已有的观测数据,自主学习和识别出系统的行为特征,并构建出近似的动力学模型,为大学物理实验教学注入新时代的活力。

机器学习中循环神经网络(RNN)算法,主要用于处理序列数据^[4,5]。储备池计算(reservoir computing, RC)方法由 Verstraeten 等人命名,其前身为回声状态网络(echo state networks, ESNs)^[6]与液态机(liquid state machines, LSMs)^[7]。因其简化的网络结构与对网络中邻接矩阵谱半径及稀疏度的控制,有效缓解了 RNN 常见的梯度爆炸问题,并在语音识别^[8]、链路推理^[9]等领域均有广泛的应用。研究表明,经过适当训练的 RC 能够准确预测典型混沌系统的演化状态,持续时间约为 6 个李雅普诺夫时间^[10],这远比传统非线性科学方法的预测时间长。除了预测短期状态演化,RC 还能够准确地重复混沌系统的长期统计特性,如吸引子的形状和李雅普诺夫指数^[11],从而被广泛用于预测混沌现象和重建混沌系统分岔图^[11-22]。并且将参数控制通引入标准 RC——参数感知储备池计算(parameter-aware reservoir computing, PARC)方法^[23],根据几个采样状态的时间序列训练模型,可以推断出采样集外其他状态的动力学特性。

本研究以非线性电路实验为例,在仅能测量到的两路电压信号的情况下,通过 PARC 方法,只利用三个采样状态的时间序列训练机器学习模型,就能够推断出不包含在训练集中的其他状态的动力学特性,准确重现实验相图与相应的分岔图,大大缩短了实验的时间成本及操作难度,为学生们理解

实验的非线性特征与倍周期分岔道路提供了更直观有力的支撑。这种数据驱动的方法不仅展示了 AI 技术在处理实际实验限制中的强大适应能力,也体现了 AI 技术与大学物理教学相结合的优势。

1 非线性电路实验概述

本工作采用的非线性电路是由 Chua 于 1983 年提出的,由于其简洁性和典型性,成为研究非线性动力学和混沌现象的重要模型之一^[24-25]。它是由线性电阻、电容、电感和非线性电阻组成的三阶自治电路,通过改变电路参数,可以实现丰富的动力学现象,产生复杂和不可预测的混沌动态行为。非线性电路的电路原理图如图 1(a)所示,其中一共有五个基本的电路元件,包括四个线性元件电容 C_1 , 电容 C_2 , 电感 L , 线性可变电阻 R_0 和一个非线性电阻 R 。非线性电阻 R 是一个分段线性的电阻,它的 $I-U$ 特性曲线如图 1(b)所示。

本研究使用混沌系统实现加密通信功能的大学物理实验设备——ZKY-HD 型混沌原理及应用物理实验仪,测量非线性电路的数据。通过调节电路中的可变电阻旋钮改变电路状态,测量其电阻大小,并用 LabVIEW 软件与配套的数据采集

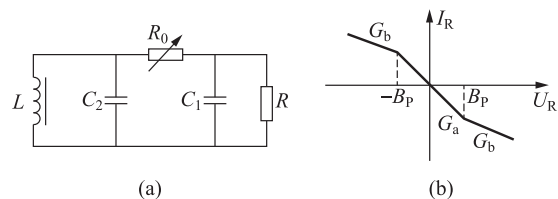


图 1 非线性电路原理图及非线性电阻的伏安特性曲线

(a) 电路原理图; (b) 非线性电阻的 $I-U$ 特性曲线

卡实现数据的精确存储。但是,当前的实验仪器只能输出电容两端的电压信号,通过电感的电流信号无法采集到。

在实际教学中,非线性电路实验的主要内容包括两个部分:测量非线性电阻 R 的 $I-U$ 特性曲线和观察倍周期分岔走向混沌的道路。第一部分的实验操作需要学生取下非线性电阻 R , 外接电流表和电源。通过调节旋钮改变电源电压的大小,测量在不同电压下通过非线性电阻 R 的电流的变化规律,从而得到其 $I-U$ 特性曲线。第二部分的实验操作,需要学生通过调节旋钮改变可变电阻 R_0 的大小以改变电路状态,同时观察示波器屏幕上的电路曲线呈现出的倍周期变化,感受其走向混沌的道路。由于混沌是系统中多个周期轨道的不稳定而产生的,如果仔细调整 R_0 , 还可以观察到落在混沌区域中的周期三轨道窗口。图 2

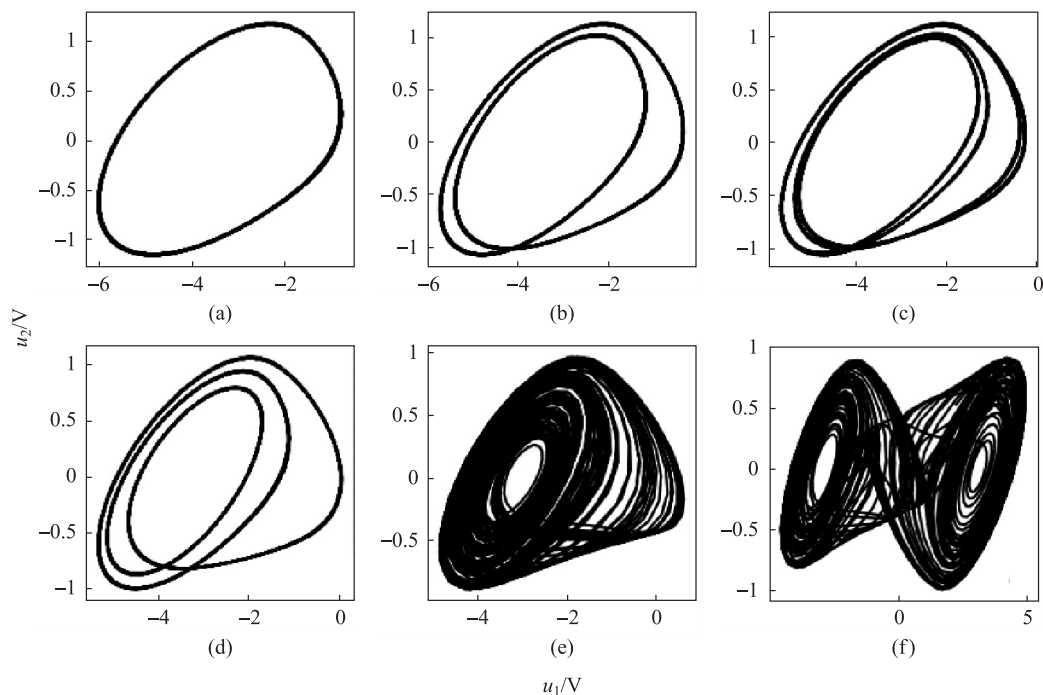


图 2 非线性电路实验相图

(a) 周期一; (b) 周期二; (c) 周期四; (d) 周期三; (e) 单吸引子; (f) 双吸引子

给出了通过逐渐减小 R_0 , 不同的周期状态与混沌状态下的实验相轨迹图像。

在实际测量分岔图的过程中, 学生一般需要花费 2 至 3 小时才能得到一张较为完整的图像。同时, 学生还需要通过选取适当的数据间隔来捕捉系统从一种状态向另一种状态转变的精确点。这种需求在教学环境中特别具有挑战性, 因为学生在课堂的有限时间内往往难以获取足够的的数据点, 或调整到恰当的数据间隔, 从而导致分岔点的不准确, 倍周期分岔图不清晰, 如图 3 所示。

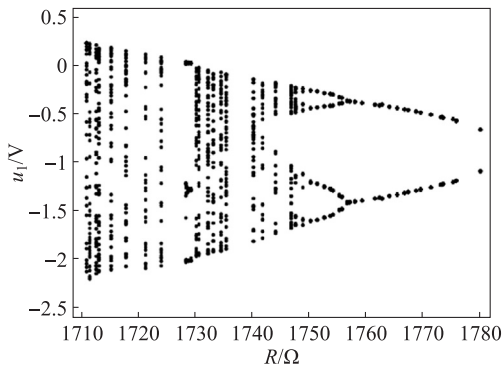


图 3 实验测量的非线性电路分岔图

根据电路原理, 可通过以下方程组对非线性电路进行建模

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \frac{1}{C_1 R} (u_2 - u_1) - \frac{1}{C_1} g(u_1) \\ \dot{u}_2 = \frac{1}{C_2 R} (u_1 - u_2) + \frac{1}{C_2} i_L \\ \dot{i}_L = \frac{1}{L} (-u_2) \end{cases} \quad (1)$$

其中, u_1 为电容 C_1 两端的电压, u_2 为电容 C_2 两端的电压, i_L 为通过电感 L 的电流, $g(u_1)$ 为描述非线性电阻 R 的 I - U 特性多项式

$$g(u_1) = G_b u_1 +$$

$$\frac{1}{2} (G_a - G_b) (|u_1 + B_p| - |u_1 - B_p|) \quad (2)$$

为了能够缩短测量时间, 简化得到倍周期分岔图的过程, 需要采取新的分析策略。并且由于当前使用的实验装置无法获取 i_L 的数据, 传统的建模与分析方法显然不再适用, 所以无法直接应用非线性电路的理论模型(1)来进行实验现象与倍周期分岔图的模拟。

2 机器学习方法的应用

2.1 储备池计算

机器学习方法依赖于大量的数据进行训练, 通过数据驱动的方法捕捉系统的潜在规律和模式, 而不依赖于对系统动力学的显式了解。因此, 即使在某些变量缺失的情况下, 模型仍可以从不完全的数据中提取出有用的信息, 有效地进行预测和分类。在本实验中, 虽然存在 i_L 缺失的情况, 但对于机器学习模型的训练过程影响较小。且通过恰当的机器学习模型的设计, 依然可以实现对非线性电路复杂非线性行为的准确分析。

通常的 RC 由输入层、储层和输出层三个模块组成, 其储层为一个随机生成的固定核心网络, 用以处理输入信号, 且只需对网络的输出层进行训练。PARC 的结构原理如图 4(a) 所示^[23], 与传统 RC 不同的是, PARC 方法在输入层中引入了一个额外的参数通道 R , 与采集到的实验数据 $u_R(t)$ 同时作为信号输入到储层中对模型进行训练。其中实验数据 $u_R(t) = [u_1(t); u_2(t)]$ 表示在调节实验仪器的可变电阻值为 R 时, 所采集到的非线性电路在 t 时刻的两路电压时间序列。此外, PARC 方法需要利用多组数据片段来增强训练过程, 从

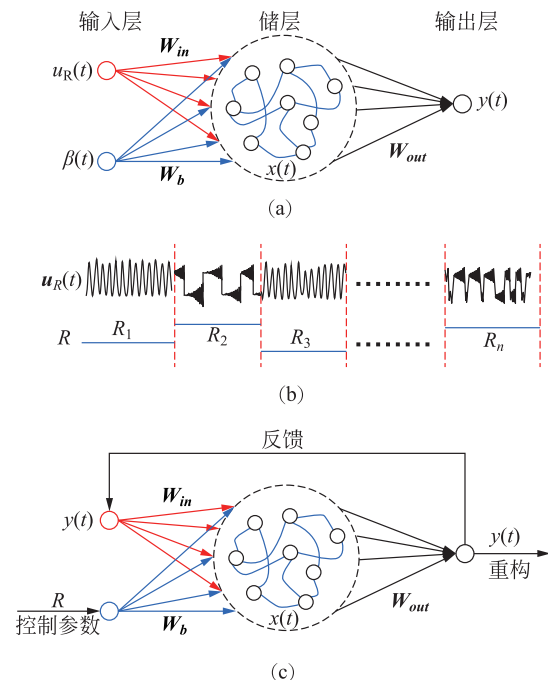


图 4 PARC 计算原理示意图

(a) 训练阶段; (b) 输入信号示意; (c) 重构阶段

而优化模型的性能和预测精度。因此,在训练阶段,输入信号由采集的多组实验数据 $u_R(t)$ 和相应的 R 拼接而成,即

$$g(u_R(t), R) = (u_1(t), u_2(t), R)^T \quad (3)$$

注意到,由于实验教学中并未对 i_L 进行测量,因此输入信号中不包含 i_L 的数据,仅通过 $u_1(t)$, $u_2(t)$ 对模型进行训练。

储层节点动力学状态的更新公式为

$$\mathbf{x}(t) = (1 - \alpha)\mathbf{x}(t-1) + \alpha \tanh[\mathbf{W}_{in}\mathbf{u}_R(t - \Delta t) + \mathbf{W}\mathbf{x}(t - \Delta t) + \mathbf{W}_R R] \quad (4)$$

其中,储层节点数为 $N=600$, $\mathbf{x}(t)$ 为 N 个储层节点的状态, $\mathbf{W}_{in}$ 为服从 $[-\sigma_1, \sigma_1]$ 均匀分布的随机输入矩阵作为输入权重, $\mathbf{W}_R$ 为服从 $[-\sigma_2, \sigma_2]$ 均匀分布的随机输入矩阵作为输入权重, $\mathbf{W}$ 为服从 $[-1, 1]$ 均匀分布的随机储层连接矩阵作为储层节点的耦合权重, α 为控制储层状态更新速度及其记忆能力的泄漏率。储层节点状态与输出信号通过方程

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}_{out}\mathbf{x}(t) \quad (5)$$

耦合。其中, $\mathbf{y}(t) = [u'_1(t); u'_2(t)]$ 为输出信号, $\mathbf{W}_{out}$ 为通过训练过程得到的输出矩阵。综上所述, PARC 中的超参数除了 $\mathbf{W}_{out}$ 外, 在训练时均为固定参数。因此, 在训练阶段的任务就是找到一个合适的输出矩阵 $\mathbf{W}_{out}$, 使输出信号 $\mathbf{y}(t)$ 经过式(5)计算后尽可能接近下一时刻的输入信号 $u_R(t + \Delta t)$ 。这可以通过岭回归算法实现, 它是一种通过最小化关于 $\mathbf{W}_{out}$ 的损失函数

$$\mathbf{W}_{out} = \mathbf{y}(t)\mathbf{x}(t)^T (\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^T + \eta \mathbf{E})^{-1} \quad (6)$$

来找到 $\mathbf{W}_{out}$ 的方法。其中, η 为避免过拟合的岭回归参数, $\mathbf{E}$ 为单位矩阵。

根据机器学习中的标准策略, 为了能够找出在训练集与测试集上表现均良好的模型, 需要采取一些手段对模型的超参数进行优化。本研究对参数空间中一定范围内的超参数进行扫描, 包括 $\mathbf{W}$ 的稀疏度 ρ 、 $\mathbf{W}$ 的谱半径 λ 、岭回归参数 η 、泄漏率 α 、 $\mathbf{W}_{in}$ 的均匀分布范围 σ_1 、 $\mathbf{W}_R$ 的均匀分布范围 σ_2 , 计算出每种参数组合下的均方根误差 (RMSE), 取均方误差最小的超参数组合作为后续使用的 PARC 模型。

在找到最优模型后, 利用它来重构相图与倍周期分岔图。图 4(c) 为模型在重构过程中 PARC 的工作过程, 通过将下一时刻的输出信号重新作为输入信号送回到 PARC 中, 同时将控制参数调

整为任意想要观测的值, 形成一种自反馈机制使得信号在模型中循环迭代, 最终得到目标的输出信号。

2.2 计算相图与分岔图

在实际实验中, 首先采集 $R = 1690\Omega$, $R = 1710\Omega$, $R = 1730\Omega$ 三组实验数据, 得到了每组包含 4000 个数据点的时间序列。将时间序列分成两个长度相等的部分, 前半部分作为数据的训练集, 后半部分作为数据的验证集。因此, 整个训练集的大小为 6000 个数据点, 验证集的大小也为 6000 个数据点。根据本研究选取的实验数据, 利用上述数据处理与模型训练方法, 寻找到最优的超参数。将这组超参数下的 PARC 作为该实验的近似动力学模型。在后续重构的过程中, 先输入已有的真实数据启动 PARC, 再抛去前 10000 个不稳定点, 得到最终的重构相轨迹。

为了验证 PARC 模型对采样数据集之外的其他状态的重构结果的准确性, 研究选取 $R = 1700\Omega$, 重构该参数下的相图并与实验相图对比, 结果如图 5 所示。可以看到, 吸引子的形状十分相似, 且参数的变化范围保持一致。因此, 经过训练的 PARC 模型能够较好地重构出实验相图。

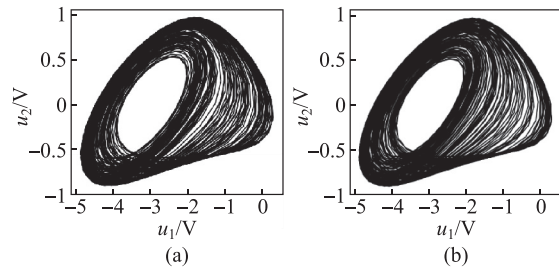


图 5 吸引子相图

(a) 实验测量结果; (b) 重构结果, 其中参数组合为 $\rho=0.27$, $\lambda=0.75$, $\eta=7 \times 10^{-5}$, $\alpha=0.24$, $\sigma_1=0.86$, $\sigma_2=0.0027$

接下来对实验的倍周期分岔图进行重构。根据训练好 PARC 模型, 将参数通道 R 的值从 $R = 1710\Omega$ 逐渐增加到 $R = 1780\Omega$, 增量步长设定为 $\Delta R = 1\Omega$ 。对于每一个 R 值, 存储 10000 个输出信号中的数据点, 并提出 $u_1(t)$ 作为输出序列。通过遍历每个 R 值下的输出序列, 从第二个数据点到倒数第二个数据点, 找到并标记出大于前后相邻两个数据值的数据点, 作为当前 R 下的局部极大值。随后, 这些遍历出的 R 下的局部极大值可用来绘制实验的倍周期分岔图, 如图 6 所示。

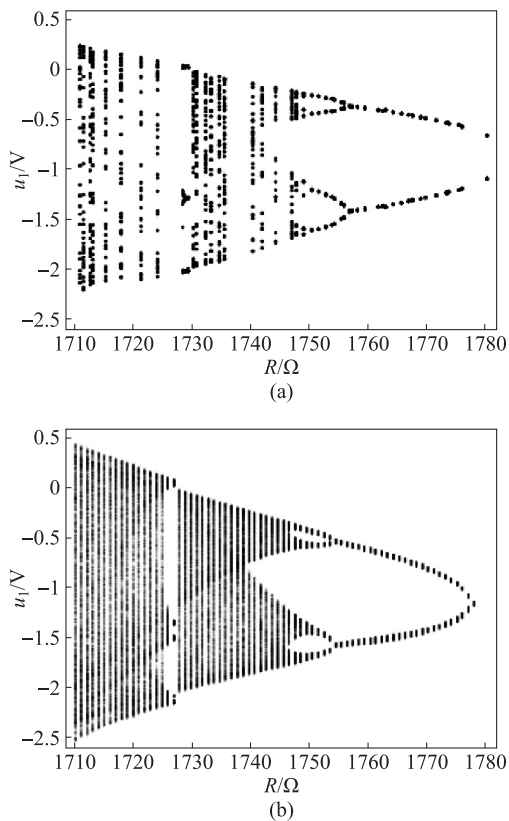


图6 倍周期分岔图对比
(a) 实验测量结果; (b) 重构结果

可以看到,利用 PARC 方法绘制的分岔图从周期一到周期二的分岔点重构误差仅在 0.1%,且相比于实验测量分岔图,能更清晰的展现出嵌入在混沌态中的周期三窗口。综上,重构得到的倍周期分岔图更直观地显示出参数变化引起的系统动力学行为的转变,清晰地揭示其走向混沌的道路。由此也显著加深了学生对混沌现象的理解。

用训练好的 RC 系统计算得到上述分岔图的过程在 1 分钟之内便可完成,即便是包含了三组训练数据的测量时间,获得完整分岔图所需的时间也不足 10 分钟。这不仅大大缩短了实验数据的测量周期,得到的图像在质量和精度上也显著提高,学生在准确推断出高阶周期轨道的过渡点的同时,还能识别出嵌入在混沌区域中的周期窗口。这些结果表明,PARC 方法在处理和复杂非线性动力系统方面具有更全面的能力,能够提供更细致的描述系统的动力学特征。

从动力系统的角度来看,PARC 的储层可以被视为一个由非线性单元耦合而成的复杂网络。这种网络结构相较于非线性电路动力系统的复杂

度更高,因而在对混沌现象进行重构时表现出更优越的效果。具体而言,通过输入信号驱动其复杂的内部动态,并通过读出函数生成输出,这种机制使得 PARC 能够捕捉并表征复杂的非线性行为和动力学特性。相比之下,非线性电路虽然能够展示出丰富的混沌现象,但其系统结构相对简单,因此在重构复杂混沌系统的长时间行为和统计特性方面,PARC 显示出更强的适应性和精确性。通过高效地处理和分析时间序列数据,PARC 不仅能够精确重构短期状态演化,还能真实再现混沌系统的长期统计属性。

3 结语

本研究将储备池计算与非线性电路实验相结合,在缺失电流信号的情况下得到了准确的实验相图与倍周期分岔图。不仅能够更直观地展示混沌动力系统的复杂行为和奇妙特性,还通过 AI 技术对非线性系统的倍周期分岔行为进行了准确的重现,极大地增强了教学效果。通过这种创新的教学手段,学生在更快、更深入、更全面地掌握复杂非线性系统本质的同时,还领略了 AI 技术的强大之处,为大学物理实验教学的应用打下坚实的基础。

下一步的计划是将 PARC 与数字孪生技术相结合,实现对实验数据的实时测量、倍周期分岔图的展现。为了让学生快速找到隐藏在混沌态中的周期窗口,并且在课堂上测量较少组的数据就观察到相应的倍周期分岔图,我们准备设计更全面且可以实时指导的工具,此工具将及时反馈学生的见解和疑问,以提升课堂的效率。

参 考 文 献

- [1] SONG R, LIANG C, CAO H, et al. Collaborative semantic occupancy prediction with hybrid feature fusion in connected automated vehicles[J]. arXiv preprint arXiv:2402.07635, 2024.
- [2] CHEN G, PARADA C, SAINATH T N. Query-by-example keyword spotting using long short-term memory networks[C]. 2015 IEEE international conference on acoustics, speech and signal processing (ICASSP). IEEE, 2015: 5236-5240.
- [3] LECUN Y, BOTTOU L, BENGIO Y, et al. Gradient-based learning applied to document recognition[J]. Proceedings of the IEEE, 1998, 86(11): 2278-2324.

- [4] CHO K, VAN MERRIËNBOER B, GULCEHRE C, et al. Learning phrase representations using RNN encoder-decoder for statistical machine translation[J]. arXiv preprint arXiv: 1406.1078, 2014.
- [5] LIPTON Z C, BERKOWITZ J, ELKAN C. A critical review of recurrent neural networks for sequence learning[J]. arXiv preprint arXiv:1506.00019, 2015.
- [6] JAEGER H. The “echo state” approach to analysing and training recurrent neural networks-with an erratum note [J]. Bonn, Germany: German National Research Center for Information Technology GMD Technical Report, 2001, 148(34): 13.
- [7] MAASS W, NATSCHLÄGER T, MARKRAM H. Real-time computing without stable states: A new framework for neural computation based on perturbations[J]. Neural computation, 2002, 14(11): 2531-2560.
- [8] CAI H, AO Z, TIAN C, et al. Brain organoid reservoir computing for artificial intelligence[J]. Nature Electronics, 2023, 6(12): 1032-1039.
- [9] KRISHNAGOPAL S, GIRVAN M, OTT E, et al. Separation of chaotic signals by reservoir computing[J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2020, 30(2).
- [10] JAEGER H, HAAS H. Harnessing nonlinearity: Predicting chaotic systems and saving energy in wireless communication[J]. Science, 2004, 304(5667): 78-80.
- [11] PATHAK J, LU Z, HUNT B R, et al. Using machine learning to replicate chaotic attractors and calculate Lyapunov exponents from data[J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2017, 27(12).
- [12] KONG L W, FAN H W, GREBOGI C, et al. Machine learning prediction of critical transition and system collapse [J]. Physical Review Research, 2021, 3(1): 013090.
- [13] KIM J Z, LU Z, NOZARI E, et al. Teaching recurrent neural networks to infer global temporal structure from local examples[J]. Nature Machine Intelligence, 2021, 3(4): 316-323.
- [14] ZHANG H, FAN H, DU Y, et al. Anticipating measure synchronization in coupled Hamiltonian systems with machine learning[J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2022, 32(8).
- [15] ZHANG H, FAN H, WANG L, et al. Learning Hamiltonian dynamics with reservoir computing[J]. Physical Review E, 2021, 104(2): 024205.
- [16] ROY M, MANDAL S, HENS C, et al. Model-free prediction of multistability using echo state network[J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2022, 32(10).
- [17] KONG L W, WENG Y, GLAZ B, et al. Reservoir computing as digital twins for nonlinear dynamical systems[J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2023, 33(3).
- [18] DOMINGO L, GRANDE M, BORONDO F, et al. Anticipating food price crises by reservoir computing[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2023, 174: 113854.
- [19] LU Z, PATHAK J, HUNT B, et al. Reservoir observers: Model-free inference of unmeasured variables in chaotic systems[J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2017, 27(4).
- [20] PATHAK J, HUNT B, GIRVAN M, et al. Model-free prediction of large spatiotemporally chaotic systems from data: A reservoir computing approach[J]. Physical review letters, 2018, 120(2): 024102.
- [21] WENG T, YANG H, GU C, et al. Synchronization of chaotic systems and their machine-learning models [J]. Physical Review E, 2019, 99(4): 042203.
- [22] GUO Y, ZHANG H, WANG L, et al. Transfer learning of chaotic systems[J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2021, 31(1).
- [23] LUO H, DU Y, FAN H, et al. Reconstructing bifurcation diagrams of chaotic circuits with reservoir computing[J]. Physical Review E, 2024, 109(2): 024210.
- [24] CHUA L O, KOCAREV L, ECKERT K, et al. Experiment chaos synchronization in chua's circuit [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1992, 2(3): 705-708.
- [25] KENNEDY M P. Three steps to chaos. I[J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems I Fundamental Theory & Applications, 1993, 40(10): 640-656.