

维恩定律和维恩位移定律的推导

岳 鑫

(天津市静海区科学技术局, 天津 301600)

摘 要 维恩定律揭示了黑体辐射能量随波长(频率)分布的情况, 维恩位移定律描述了黑体辐射光谱峰值波长与自身温度之间的反比关系。在大学物理关于量子力学的讲述中, 常把它们作为引出普朗克黑体辐射定律的背景材料, 很多时候都是做一般性的介绍, 缺乏具体的说明和推导。而在一些研究文献中, 研究人员也提出各种不同的推导方法, 没有体现历史上的真实情况, 并且有些方法显得过于繁琐。本文利用原始文献, 遵循维恩的研究思路, 叙述了维恩定律和维恩位移定律的建立过程, 并对维恩的论述进行了补充分析, 清晰地展示了维恩定律和维恩位移定律的推导。

关键词 黑体辐射; 维恩定律; 维恩位移定律

DERIVATIONS OF WIEN'S LAW AND WIEN'S DISPLACEMENT LAW

YUE Xin

(Tianjin Jinghai District Science and Technology Bureau, Tianjin 301600)

Abstract Wien's Law reveals the distribution of blackbody radiation energy with wavelength (frequency), while Wien's Displacement Law describes the inverse relationship between the peak wavelength of blackbody radiation and its temperature. In university physics courses, especially when introducing quantum mechanics, these laws are often presented as background material leading to Planck's blackbody radiation law. However, they are usually introduced in a general manner, lacking specific explanations and derivations. In some research papers, various derivation methods have been proposed, which do not reflect the historical context and can sometimes appear overly complicated. In this paper, using the original literature and following Wien's research ideas, I describe the process of establishing Wien's law and Wien's displacement law, and provide an innovative and complementary analysis of Wien's derivation, clearly demonstrating the derivation of Wien's law and Wien's displacement law.

Key words blackbody radiation; Wien's law; Wien's displacement law

普朗克在 1900 年 12 月发表了普朗克公式的统计物理推导, 标志着量子论的诞生。普朗克公式能够很好地与当时测得的黑体辐射曲线进行拟合。在普朗克公式正式提出之前, 德国物理学家

维恩也进行了深入研究, 提出了著名的维恩定律和维恩位移定理。维恩定律描述了黑体辐射能量随波长(频率)分布的情况, 维恩位移定律描述了黑体辐射光谱峰值波长与自身温度之间的反比关

收稿日期: 2024-10-24

通信作者: 岳鑫, 531681901@qq.com。

引文格式: 岳鑫. 维恩定律和维恩位移定律的推导[J]. 物理与工程, 2025, 35(3): 63-65.

Cite this article: YUE X. Derivations of Wien's law and Wien's displacement law[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(3): 63-65. (in Chinese)

系,两个定律揭示了黑体辐射的内在规律,维恩定律在短波段与实验数据符合很好,但在长波段具有较高的误差。目前,国内的多数物理学教材^[1,2]只是简单地提及维恩定律和维恩位移定律,缺乏具体的介绍和推导,一些论文也没有按照维恩的方法去推导定律^[3,4]。本文将以1896年维恩发表的文章为根据,清晰地对维恩定律和维恩位移定律的推导情况进行介绍,并对维恩的推导过程进行了补充。

1 维恩定律

维恩把气体分子作为辐射源,假定在波长 λ 和 $\lambda+d\lambda$ 之间的辐射强度 $\varphi(\lambda)$ 与两个因素成比例:(1)发出辐射波长 λ 的振动分子数量,(2)某个速率的函数或波长的函数^[5]。

对于第一个因素,维恩借鉴了麦克斯韦分布律的形式:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} \quad (1)$$

根据麦克斯韦分布律,可知速率在 v 和 $v+dv$ 之间的分子数 N_v 正比于 $v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$,其中包含一项指数函数。

对于第二个因素,维恩认为气体温度与分子平均动能成正比。波长 λ 是分子运动速率 v 的函数,那么,也可以认为分子运动速率 v 是波长 λ 的函数。热辐射随温度升高而增强,是温度的函数,也是波长的函数。

维恩从而写出了下式:

$$\varphi(\lambda) = F(\lambda) e^{-\frac{f(\lambda)}{T}} \quad (2)$$

其中 $F(\lambda)$ 和 $f(\lambda)$ 是未知函数, T 为绝对温度。 e 指数函数体现了第一个因素, $F(\lambda)$ 函数体现了第二个因素。

1.1 确定 $f(\lambda)$ 的形式

为了确定函数 $f(\lambda)$ 的具体形式,维恩结合斯特藩-玻尔兹曼定律和他自己发现的温度与波长反比例规律,对实验数据的图形进行分析:以波长为横坐标,以 $\varphi(\lambda)$ 纵坐标,温度从1K变为 T 后,将函数图形纵坐标缩小 T^4 倍,横坐标波长 λ 扩大 T 倍,就会与1K时的图形重合,据此可以推测 e 指数中的 λ 和 T 以 λT 形式出现,假设 c 为常数,可以得到^[5]:

$$\frac{f(\lambda)}{T} = \frac{c}{\lambda T} \quad (3)$$

维恩是采用上述文字描述来得出 $f(\lambda)$ 的具体形式,缺乏具体的数学推导。下面将按照函数缩放原理,通过严谨的数学方法来进行补充证明,以确定函数 $f(\lambda)$ 的形式:

当 $T=1K$ 时,

$$\varphi(\lambda_1) = F(\lambda_1) e^{-f(\lambda_1)} \quad (4)$$

当 $T=\theta K$ 时,

$$\varphi(\lambda_2) = F(\lambda_2) e^{-\frac{f(\lambda_2)}{\theta}} \quad (5)$$

由于 $\varphi(\lambda)$ 函数是分布函数,所以可以用 $\varphi(\lambda)d\lambda$ 表示 λ 和 $\lambda+d\lambda$ 之间的能量。按照维恩的思路,从函数图像纵坐标缩放可以得到:

$$\frac{\varphi(\lambda_2)d\lambda_2}{\theta^4} = \varphi(\lambda_1)d\lambda_1 \quad (6)$$

从横坐标缩放可得 $d\lambda_1 = \theta d\lambda_2$,则有:

$$\frac{\varphi(\lambda_2)}{\theta^5} = \varphi(\lambda_1) \quad (7)$$

进而可得:

$$F(\lambda_2) e^{-\frac{f(\lambda_2)}{\theta}} = \theta^5 F(\theta\lambda_2) e^{-f(\theta\lambda_2)} \quad (8)$$

式(8)要成立,需要如下条件:

$$e^{-\frac{f(\lambda_2)}{\theta}} = e^{-f(\theta\lambda_2)} \quad (9)$$

$$F(\lambda_2) = \theta^5 F(\theta\lambda_2) \quad (10)$$

计算式(9)可得: $f(\lambda) = \frac{c}{\lambda}$ (c 为常数)

1.2 确定 $F(\lambda)$ 的形式

确定了 $f(\lambda)$ 的形式后,需要确定 $F(\lambda)$ 的形式。根据斯特藩-玻尔兹曼定律,可以得到

$$\int_0^\infty F(\lambda) e^{-\frac{c}{\lambda T}} d\lambda = \text{const} \cdot T^4 \quad (11)$$

维恩采用了无限系数法来确定 $F(\lambda)$,令 $\lambda = \frac{c}{yT}$,则 $F(\lambda) = F\left(\frac{c}{yT}\right)$,将 F 写成一个数列之和,如下式^[5]:

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= F\left(\frac{c}{yT}\right) \\ &= a_0 + a_1 \frac{Ty}{c} + a_2 \frac{T^2 y^2}{c^2} + \cdots + \\ &\quad a_n \frac{T^n y^n}{c^n} + \cdots + a_{-1} \frac{c}{Ty} + \cdots + a_{-n} \frac{T^{-n} y^{-n}}{c^{-n}} \end{aligned} \quad (12)$$

积分可得:

$$\int_0^\infty F(\lambda) e^{-\frac{c}{\lambda T}} d\lambda = \frac{c}{T} \int_0^\infty F\left(\frac{c}{yT}\right) e^{-y} \frac{dy}{y^2}$$

$$= \sum_n a_n \frac{T^{n-1}}{c^{n-1}} \int_0^\infty e^{-y} y^{n-2} dy \quad (13)$$

则有

$$\text{const} \cdot T^4 = \sum_n a_n \frac{T^{n-1}}{c^{n-1}} \Gamma(n-1) \quad (14)$$

为保证式(14)成立,需要当 $n \neq 5$ 时, $a_n = 0$, 当 $n = 5$ 时,系数不为 0,所以

$$F(\lambda) = \frac{\text{const}}{\lambda^5} \quad (15)$$

可得出维恩定律:

$$\varphi(\lambda) = \frac{c_1}{\lambda^5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \quad (16)$$

以上是维恩对于 $F(\lambda)$ 的推导过程,如果采用式(10),则可以直接得到式(15)。

2 维恩位移定律

分别对 $\varphi(\lambda)$ 求一阶和二阶导数^[5],可得:

$$\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{c_1}{\lambda^6} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \left(5 - \frac{c_2}{\lambda T} \right)$$

$$\frac{d^2\varphi(\lambda)}{d\lambda^2} = \frac{c_1}{\lambda^7} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \left(30 - \frac{12c_2}{\lambda T} + \frac{c_2^2}{\lambda^2 T^2} \right),$$

当 $\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} = 0$ 时, $\lambda = \frac{c_2}{5T}$, 此时 $\frac{d^2\varphi(\lambda)}{d\lambda^2} = -\frac{5c_1}{\lambda^7} e^{-5}$, 为负数。所以 $\lambda = \frac{c_2}{5T}$ 为极大值, 则有 $\lambda_m T = \text{const}$ 。(λ_m 为能量分布极大值时的波长)。

3 结论

通过上述推导过程,能够看到维恩在相关定律的研究过程中做了多次假设,首先在函数形式

上借用麦克斯韦方程,其次在确定 $F(\lambda)$ 和 $f(\lambda)$ 的具体形式上进行大胆推测,所以维恩定律是一个半经验半理论公式。本文利用简洁的数学推导对维恩的研究进行了补充证明,更加清晰地还原了当年维恩的研究思路,有助于理解量子力学的早期发展历史。维恩以他在热辐射研究中的卓越贡献荣获 1911 年诺贝尔物理学奖,虽然维恩定律有缺陷,但维恩的研究成果为从经典物理学向量子物理学的过渡架起了一座桥梁。正像 1914 年诺贝尔物理学奖得主劳厄所说的,维恩的不朽的荣耀是“他为我们打开了通往量子物理学的大门”^[2]。

参 考 文 献

- [1] 张三慧. 大学物理学(第五册)量子物理[M]. 2 版. 北京:清华大学出版社,2000:5-6.
ZHANG S H. University physics (The fifth) Quantum physics[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2000: 5-6. (in Chinese)
- [2] 顾樵. 量子力学 I [M]. 北京:科学出版社,2014:18-19.
Gu Q. Quantum mechanics I [M]. Beijing: Science Press, 2014: 18-19. (in Chinese)
- [3] 黄永义. 普朗克黑体辐射定律的建立过程[J]. 广西物理, 2011,32(3):32-36.
HUANG Y Y. The process of establishing Planck's black-body radiation law[J]. Gaungxi Physics, 2011, 32(3): 32-36. (in Chinese)
- [4] 田华. 关于辐射的经典理论[J]. 河北师范大学学报(自然科学版),1999,19(1):36-41.
TIAN H. On the calssical theory, of radiation[J]. Journal of Hebei Normal University (Nature Science), 1999,19(1): 36-41. (in Chinese)
- [5] WIEN W. Ueber die Energievtheilung im Emissionsspectrum eines schwarzen Körpers, Annalen der Physiks[J]. Annalen der Physik 1896, 294(8): 662-669.