

外加电磁场下无质量狄拉克方程的严格解

马 宁

(太原理工大学物理与光电工程学院, 山西 太原 030024)

摘 要 石墨烯作为一个前沿的研究领域, 其本征值问题的求解对量子力学教学具有重要的示范意义。本文以石墨烯为例, 提出了严格求解外加电磁场下无质量狄拉克方程本征值问题的一种较为简洁的方法, 即基于朗道和栗弗席兹的相对性量子理论原理, 并借助一维谐振子模型众所周知的本征值解巧妙地解析得到了狄拉克方程的本征能量和本征波函数。结果表明, 在外加电磁场的石墨烯物理系统中, 电场会使得相邻朗道能级间隔发生收缩, 并最终导致整个朗道能谱在 $\beta=1$ 的临界值处突然发生塌缩, 这一有趣的物理现象在非相对论性的标准二维电子气系统中并未出现。石墨烯本征值问题的求解, 可以展示量子力学在凝聚态物理和材料科学中的应用。学生可以学习如何使用量子力学理论来解释和预测石墨烯的电学性质, 如能带结构和导电性等。这有助于增强学生对量子力学理论与实际应用之间的联系, 提高他们对凝聚态物理和材料科学中量子效应的理解。

关键词 石墨烯; 电磁场; 狄拉克方程; 本征值

THE EXACT SOLUTION OF THE MASSLESS DIRAC EQUATION IN THE PRESENCE OF AN EXTERNAL ELECTROMAGNETIC FIELD

MA Ning

(College of Physics and Optoelectronic Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan, Shanxi 030024)

Abstract Graphene, as a cutting-edge research field, holds significant demonstrative value for quantum mechanics education through the solution of its eigenvalue problems. In this paper, taking graphene as an example, we propose a relatively concise method for the exact solution of the eigenvalue problem of the massless Dirac equation in the presence of an external electromagnetic field. This method is based on the principles of relativistic quantum theory by Landau and Lifshitz, and with the help of the well-known eigenvalue solution of one-dimensional harmonic oscillator model the eigenenergy and the eigenstate are obtained by cleverly resolving the Dirac equation. The results show that in the graphene physical system under an external electromagnetic field, the electric field causes a contraction in the spacing between adjacent Landau levels, eventually leading to a sudden collapse of the entire Landau spectrum at the

收稿日期: 2023-08-03

基金项目: 国家自然科学基金(11305113); 山西省自然科学基金面上项目(202303021221047); 山西省高等学校教学改革创新项目(J20230219; J2019057); 山西省研究生教育改革研究课题项目(2019JG059)。

通信作者: 马宁, maning@tyut.edu.cn。

引文格式: 马宁. 外加电磁场下无质量狄拉克方程的严格解[J]. 物理与工程, 2025, 35(3): 50-56.

Cite this article: MA N. The exact solution of the massless Dirac equation in the presence of an external electromagnetic field[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(3): 50-56. (in Chinese)

critical value of $\beta=1$. This interesting physical phenomenon does not occur in the non-relativistic standard two-dimensional electron gas system. The solution of the eigenvalue problem of graphene can demonstrate the application of quantum mechanics in condensed matter physics and materials science. Students can learn how to use quantum mechanics theory to explain and predict the electronic properties of graphene, such as its band structure and conductivity. This helps to enhance students' understanding of the connection between quantum mechanics theory and its practical applications, and improves their comprehension of quantum effects in condensed matter physics and materials science.

Key words graphene; electromagnetic field; Dirac equation; eigenvalue

将科技前沿知识融入高校物理教学具有重要的意义。首先,科技前沿知识是时代发展的最新成果,通过将其融入物理教学,可以帮助学生了解和关注科学技术的最新进展,增强他们对物理学科的兴趣和好奇心。其次,融入科技前沿知识可以促使物理教学与实际应用更加贴近。物理学作为一门实验性较强的学科,科技前沿的应用实例可以让学生更好地理解物理原理,并将其应用于实际问题的解决中。这样的教学方法不仅有助于培养学生解决问题的能力,也可以激发他们对物理学科的实际应用价值的认识。此外,融入科技前沿知识还有助于培养学生的创新思维和科学精神。了解和学习最新的科技前沿知识,可以帮助学生拓宽视野,增强对科学知识的深入理解,培养学生对新问题的探索 and 解决能力。这对学生未来的创新能力和科研潜力的发展具有重要意义。总之,将科技前沿知识融入大学物理教学不仅可以激发学生对物理学科的兴趣和好奇心,还可以贴近实际应用,培养学生的解决问题能力和创新思维,为他们的科研和职业发展打下良好基础。

在量子力学的教学中引入石墨烯前沿可以帮助学生更好地理解量子力学的基本概念和原理,并将其应用于现实世界中的科学和技术领域。石墨烯是由单层碳原子排列而成的准二维材料^[1],展现了一系列奇特的量子力学行为^[2,3],因而一跃成为凝聚态物理和材料物理领域的研究热点。通过研究石墨烯可以加深学生对于准二维材料的理解,并帮助他们更好地理解量子力学在这类材料中的应用。石墨烯中的电子表现出量子隧穿效应,即电子可以以概率非零的方式穿越出固体的能带,并在另一侧出现。这个现象在量子力学中具有重大意义,对于学生掌握隧穿效应以及相关

的量子力学概念是非常重要的。此外,石墨烯中的电子遵循狄拉克(Dirac)方程,这意味着它们被描述为狄拉克费米子。狄拉克费米子是量子力学中的一类粒子,具有特殊的性质,如反相对称性和存在反粒子。通过研究石墨烯,学生可以更好地理解狄拉克费米子的行为以及它们在量子力学中的重要性。特别地,由于其独特的电学性质,石墨烯可以应用于量子点、量子阱、量子线等器件中,这些器件在现代科技中发挥着重要作用。通过引入石墨烯,学生可以了解这些器件的工作原理,并将所学的量子力学理论应用于实际应用场景中。

本征值问题是量子力学中的基础概念之一,它涉及量子系统的能量和态的特性。解决本征值问题对于量子力学教学是至关重要的,可以提升学生对量子态和量子系统性质的理解,并培养他们的问题解决能力和数学思维。正如前文所述,石墨烯在近年来的研究中引起了广泛的关注,其本征值问题的求解对量子力学教学具有重要的示范意义。前期,我们根据相对性量子理论的原理^[4,5],在外部电磁场的存在下,已经严格求解了石墨烯中的狄拉克方程并得到了本征能量和本征波函数^[6],并将这种方法成功地扩展到了更为复杂的情景,如外加电磁场下的石墨烯纳米带(带有锯齿和扶手椅边缘)^[7],以及涉及电磁场与自旋-轨道相互作用^[8]和应变场耦合^[9]的情形。然而,由于我们的文献只是简单提及计算思路并未给出推导细节,本文旨在呈现并讨论详细的推导过程,促进与读者的交流和探索。除了我们的方法外,还有其他方法用于求解外加电磁场下石墨烯的本征值。例如,Lukose等人提出了洛伦兹变换法^[10];Peres等人基于双线性对角化方法开发了

一种代数解法^[11];我们的合作者 Alisultanov 等人提出了一种基于 Lifshitz-Onsager 量子化条件的准经典方法^[12]。相比较而言,我们研究中采用的方法提供了一个更简单和更清晰的获取本征值的过程。

1 哈密顿量

如图 1 所示,本文以理想石墨烯为例,且要求其晶格尺寸比晶格常数($a = 2.461 \text{ \AA}$)大得多,故而这里无须考虑杂质、缺陷以及不同类型边界(如扶手椅、锯齿型等)引入的约束条件。严格地讲,石墨烯是具有一个原子层厚度的准二维平面六角蜂窝型结构。理论上,根据石墨烯的结构特点,我们利用固体理论紧束缚近似和量子电动力学(QED)的方法,已经成功推导出石墨烯自由狄拉克粒子的哈密顿量形式^[13]即 $\hat{H} = v_F \hat{\alpha} \cdot \mathbf{p}$,并求解得到狄拉克点(零能)附近的能谱色散关系,即本征能量 $\epsilon(k) = \pm \hbar v_F k = \pm p v_F$,结果表明能量(ϵ)与动量($\mathbf{p}$)之间满足线性关系呈现相对论特性,而不是非相对论性的抛物线关系 $\epsilon(k) = \hbar^2 k^2 / (2m) = p^2 / (2m)$ 。换言之,石墨烯自由狄拉克粒子的性质非常类似于静质量为零的相对论粒子,其费米速度 v_F 等效于光速 $c^* = v_F \approx 1.0 \times 10^6 \text{ m/s}$,故被称作无质量狄拉克费米子,这一特性已被实验证实^[1-3]。因此,在外加电磁场情况下,我们选定 QED 模型——外加电磁场的无质量狄拉克方程,而非薛定谔方程来描述它。

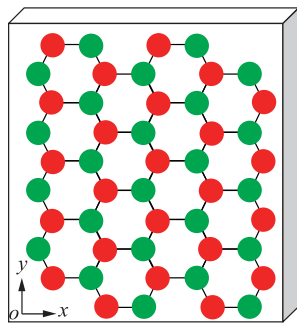


图 1 石墨烯结构示意图,深(浅)色小球分别表示碳原子 A(B)子晶格

在石墨烯面内施加均匀静电场 $[\mathbf{E} = (-E, 0, 0), U = Eex]$,在垂直于石墨烯面施加均匀静磁场 $[\mathbf{B} = (0, 0, B), \mathbf{A} = (0, Bx, 0)]$ (这里矢量 $\mathbf{A}$ 取朗道规范),则外加电磁场下石墨烯的单粒

子哈密顿量可以表示为^[5,9]

$$\hat{H} = v_F \hat{\alpha} \cdot \mathbf{\Pi} + \hat{I} e E x \quad (1)$$

其中,符号 v_F 表示费米速度, $\hat{\alpha}$ 表示自旋泡利(Pauli)矩阵, $\mathbf{\Pi} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}$ 表示包含磁场的正则动量, $\hat{I}$ 表示 (2×2) 单位矩阵。

2 本征值

本文主要考虑外加恒定电磁场下,石墨烯载流子狄拉克方程的定态本征值问题,也就是求解 $\hat{H}\Psi = \epsilon\Psi$,即 $(v_F \hat{\alpha} \cdot \mathbf{\Pi} + \hat{I} e E x) \Psi = \epsilon\Psi$,其中符号 ϵ 表示定态本征能量和 Ψ 表示定态本征波函数,故而这里不出现旋量场时间导数项。根据朗道(Landau)和栗弗席兹(Lifshitz)的相对性量子理论^[4],可将哈密顿量 $\hat{H}$ 满足的狄拉克方程转化为辅助性二阶方程

$$[(\epsilon - eEx)^2 - v_F^2 (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + e\hbar B v_F^2 \hat{\alpha}_z + ie\hbar E v_F \hat{\alpha}_x] \Psi = 0 \quad (2)$$

其中,符号 ϵ 表示狄拉克方程本征能量,其他符号都是惯用的标准符号。这里值得注意,对方程(2)中各项做量纲分析之后可以发现,将狄拉克方程转化为二阶方程(2)使得方程(2)括弧里面各项量纲均变为能量平方的量纲 $[\text{L}^2 \text{MT}^{-2}]^2$ 。从方程(2)还可以看出,该式左边前两项依赖于轨道坐标,后两项则依赖于旋量坐标(即泡利矩阵),故本征函数 Ψ 应为轨道函数 $\phi(x, y)$ 和旋量函数 $\chi_{\pm}(E, B)$ 的乘积,可表示为 $\Psi \sim \phi(x, y) \chi_{\pm}(E, B)$ 。假设式(2)左边后两项本征值为 $\eta_{\pm}$,则有

$$(e\hbar B v_F^2 \hat{\alpha}_z + ie\hbar E v_F \hat{\alpha}_x) \chi_{\pm}(E, B) = \eta_{\pm} \chi_{\pm}(E, B) \quad (3)$$

将泡利矩阵代入上式后,不难求出其本征值

$$\eta_{\pm} = \pm e\hbar B v_F^2 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (4)$$

和正交归一化的本征旋量

$$\begin{cases} \chi_+^T = (\beta \varpi_m, 0, 0, i \varpi_m \varpi_n) \\ \chi_-^T = (0, \beta \varpi_m, -i \varpi_m \varpi_n, 0) \end{cases} \quad (5)$$

这里定义

$$\begin{cases} \varpi_m = (\beta^2 + \varpi_n^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \varpi_n = 1 - (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (6)$$

其中, $\beta = E/(Bv_F)$ 是一个与电场有关的无量纲参量,且满足洛伦兹协变性条件 $|\beta| < 1$ 。在当前的物理图像下,轨道本征函数 $\phi(x, y)$ 可以看作依赖于 x 且沿

y 方向的平面波 $\phi(x, y) \sim \exp(ik_y y) \phi_n(x)$ 并满足以下方程

$$[(\epsilon - eEx)^2 - v_F^2(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2] \phi(x, y) \equiv \eta_n \phi(x, y) \quad (7)$$

整理之后,可得

$$\left\{ -2mv_F^2 \left[\frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_c^{*2}}{2}(x - x_c^{*2}) \right] + \frac{(B\epsilon + p_y E)^2}{B^2(1 - \beta^2)} \right\} \phi_n(x) \equiv \eta_n \phi_n(x) \quad (8)$$

显然,上式左边第一项(即唯一的非常数项)与一维谐振子哈密顿量成正比,故其本征能量和本征函数是已知的,这是本文求解的关键。这里值得强调,在外加垂直恒定磁场条件下,石墨烯载流子会在面内做匀速圆周运动。根据量子理论,在 x - y 平面内的圆周运动对应一种简谐振动,能量是量子化的,这些量子化的能级被称为朗道能级。如果同时在面内施加恒定电场时,电场就会对谐振子轨道中心、振动圆频率以及朗道能级等进行修正。具体如何修正正是本文要讨论的问题。基于这样的物理图像,我们根据朗道和栗弗席兹理论将狄拉克方程转化为二阶方程(2)之后,再经过形式上的整理最终可以得到方程(8)。方程(8)第一项与一维定态谐振子哈密顿量成正比,其中包含了谐振子的二次方势。这个二次方势函数的中心值 x_c^* 对应谐振子轨道中心,这表明石墨烯载流子会被约束在 x 方向作一维谐振子运动。具体地,第一项中的 $\omega_c^* = \omega_c(1 - \beta^2)^{1/2}$ 和 $x_c^* = (x_c - \epsilon\beta^2/eE)/(1 - \beta^2)$ 分别表示电场修正后的回旋频率和谐振子轨道中心,其中 $\omega_c = eB/m$ 和 $x_c = l_c^2 k_y$ 分别表示无电场时的回旋频率和谐振子轨道中心,且 $l_c = \sqrt{\hbar/eB}$ 表示无电场时的磁长度(或特征长度),在有电场时应改写为 $l_c^* = \sqrt{\hbar/m\omega_c^*} = l_c/(1 - \beta^2)^{1/4}$ 。由此可得

$$\left\{ -2mv_F^2 \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c \right] + \frac{(B\epsilon + p_y E)^2}{B^2(1 - \beta^2)} \right\} \phi_n(x) \equiv \eta_n \phi_n(x) \quad (9)$$

故有

$$-(2n + 1) \hbar e B v_F^2 (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{(\epsilon + p_y v_F \beta)^2}{1 - \beta^2} = \eta_n \quad (10)$$

联合式(4)和式(10)共同代入方程 $\eta_n + \eta_{\pm} = 0$ 后,

可得本征能量

$$\epsilon = \pm \sqrt{|2n + 1 \pm 1| \hbar e B v_F^2 (1 - \beta^2)^{3/2}} - \hbar v_F \beta k_y \quad (11)$$

其中,符号 n 为整数($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$),用于标记量子化的朗道能级。由于根号外的“ $\pm$ ”号在 $n > 0$ 时取“ $+$ ”且在 $n < 0$ 时取“ $-$ ”,故可用符号函数 $\text{sgn}(n)$ 代替。实验结果^[2,3]表明,无电场时最低朗道能级(即 $n = 0$)的能量为零,因而根号内的“ $\pm$ ”号应取“ $-$ ”。最终,狄拉克方程的本征能量可以表示为

$$\epsilon_{n,k_y} = \text{sgn}(n) \omega_g \sqrt{|n|} - \hbar v_F \beta k_y \quad (12)$$

这里定义 $\omega_g = \sqrt{2} \hbar v_F (1 - \beta^2)^{3/4} / l_c$ 。该式表明方程(1)哈密顿量的能量本征值等于量子谐振子的能量与位于 x_c^* 处的带电粒子在势场 $U(x)$ 中的势能之和。该本征能量完全由 n 和 k_y 两个量子数决定,即对于确定的 n ,粒子按 k_y 分布,由于电场的存在,粒子在不同 k_y 处位能不同,这使得能量 ϵ_{n,k_y} 对 k_y 的简并被消除了,每一个固定的 n 量子数的朗道能级扩展为一个能带。在此基础上,可以进一步得到本征波函数 Ψ 的严格解

$$\Psi_{n,k_y} = \frac{\exp(ik_y y)}{\sqrt{2L_y l_c^*}} \begin{pmatrix} -i\Phi_{n-1}(\xi) \\ \Phi_n(\xi) \end{pmatrix} \chi_{\pm}(E, B) \quad (13)$$

其中, $\Phi_n(\xi)$ 一维谐振子波函数,可以用归一化的厄米多项式 $H_n(\xi)$ 表示

$$\Phi_n(\xi) = \frac{\exp(-\xi^2/2)}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} H_n(\xi) \quad (14)$$

这里定义符号 $\xi = (x - x_c^*)/l_c^*$ 且 $x_c^* = x_c - \text{sgn}(n)\sqrt{2|n|} l_c^* \beta$ 。而 x_c^* 可由前面得到的 $x_c^* = (x_c - \epsilon\beta^2/eE)/(1 - \beta^2)$ 结合本征能量式(12)求出。显然, x_c^* 明显不同于非相对论且有电场时的结果 $x_c^{\text{con}} = l_c^2 k_y - v_F^2 \beta^2 m / eE$ 。

事实上,只要垂直均匀磁场存在,不管是否外加均匀电场,粒子都会在实空间石墨烯面内做经典圆周运动,此即谐振子运动;并在能量空间形成朗道能级(带)。在本文选取的朗道规范下,本征函数式(13)的平面波成分 $\exp(ik_y y)$ 表明,粒子沿 y 方向是平面波,反映出波函数在 y 方向是扩展的;然而,束缚态成分 $\phi_n(x)$ 或 $\Phi_n(\xi)$ 的局域特性确定了载流子运动被束缚在 x 方向且作谐振子运动,即在沿 x 方向由谐振子波函数描写。这里,

$x_c = l_c^2 k_y$ 与 $x_c^* = l_c^2 k_y - \text{sgn}(n)\sqrt{2|n|}l_c^* \beta$ 分别对应于零电场与非零电场情况下,粒子经典圆运动或谐振子运动中心的 x 坐标。 $x_c(x_c^*)$ 与 k_y 有关,意味着对于一个确定的 n 朗道能级(带),粒子态会按照 k_y 分布。也就是说,每一个确定的 k_y 值,给定能量空间 n 朗道能级(带)上一个粒子态的位置,同时也给定对应实空间一个粒子经典圆运动或谐振子运动中心的位置。

由于 $x_c^* = l_c^2 k_y - \text{sgn}(n)\sqrt{2|n|}l_c^* \beta$, 根据本征函数式(13)可知, k_y 是守恒量,故 x_c^* (对应于经典圆运动中心的 x 坐标)也是在量子理论中的守恒量。当电场为零时, k_y 项 ($-\hbar v_F \beta k_y$) 在式(12)中消失,故 x_c^* 的数值不会影响本征能量 ϵ_{n,k_y} 的值, k_y 的数目正反映了量子理论中的简并度。当电场不为零时, k_y 项在式(12)中出现,故 x_c^* 的数值会影响能量 ϵ_{n,k_y} 的值,导致 ϵ_{n,k_y} 对 k_y 的简并被消除,使得每一个 n 朗道能级扩展为一个能带。基于 x_c^* 可以求出任意 n 朗道能带在单位面积内的总状态数。假设载流子的运动被限制在一个面积为 $S = L_x L_y$ 的石墨烯平面内。这时,沿 y 方向的平面波矢 k_y 由周期边界条件 $\Psi(x, y + L_y) = \Psi(x, y)$ 变为分立 $k_y = 2\pi l / L_y$ ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 其相邻允许的 k_y 值之间的间隔为 $\delta k_y = 2\pi / L_y$ 。显然, k_y 的量纲 [L^{-1}] 和晶格尺寸 L_y 的量纲 [L] 互为倒数。根据 $x_c^* = l_c^2 k_y - \text{sgn}(n)\sqrt{2|n|}l_c^* \beta$, 可以将可能的 k_y 范围 Δk_y 与物理上允许的 x_c^* 的范围 Δx_c^* 关联起来,即 $\Delta x_c^* = l_c^2 \Delta k_y$ 。由于 $\Delta x_c^* = L_x$, 故朗道态应分布在 $0 \leq x_c^* \leq L_x$ 范围内,则 k_y 的允许范围应为 $\Delta k_y = \Delta x_c^* / l_c^2$ 。因此,单位面积内任意 n 朗道能带上的量子态数目为 $D_n = g_s \Delta k_y / (S \delta k_y) = 2eB / (\hbar \pi)$; 这里 D_n 与 n 无关,而且实验^[1-3]要求 $g_s = 4$, 说明石墨烯满足自旋简并和子晶格简并。

这里需要强调,本文的模型是理想石墨烯且晶格尺寸比晶格常数大的多的情形,故而没有考虑杂质、缺陷以及不同边界类型(如扶手椅、锯齿型等)引入的约束条件。图1只是石墨烯结构的示意图,并不涉及边界条件的设定。进一步地,本征函数式(13)表明,电场会挤压谐振子态 $\Phi_n(\xi)$ 以至于电子和空穴的波函数发生混合,这里的挤压作用在物理上对应磁长度 l_c 的变化。进一步地, $\xi = (x - x_c^*) / l_c^*$ 表明谐振子高斯包的位置与朗

道能级指标(即量子数 n)有关,然而非相对论的标准二维电子气则无此结论。本文解析得到的本征值与文献[9-11]的结果一致,但是所采用的求解方法不同。

在相同外场条件下,非相对论性的标准二维电子气的本征能量为^[14,15]

$$\epsilon'_{n,k_y} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c - \hbar k_y \frac{E}{B} - \frac{m}{2} \left(\frac{E}{B}\right)^2 \quad (15)$$

对比分析式(12)和式(15)可知, ϵ_{n,k_y} 与 ϵ'_{n,k_y} 的不同点主要体现在两方面:(i) ϵ'_{n,k_y} 和 n 呈线性关系,而 ϵ_{n,k_y} 则与 $\sqrt{n}$ ($n > 0$) 呈线性关系;(ii) 低能范围内任意相邻朗道能级间隔: $\Delta(\epsilon'_{n,k_y}) = |\epsilon'_{n+1,k_y} - \epsilon'_{n,k_y}|$ 大小相等均为 $\hbar \omega_c$ 且与电场无关,但是 $\Delta(\epsilon_{n,k_y}) = |\epsilon_{n+1,k_y} - \epsilon_{n,k_y}|$ 则大小不相等且变得与电场有关可用 $(1 - \beta^2)^{3/4}$ 量度。也就是说,电场调控可以使得朗道能级间隔发生收缩,即 $\Delta(\epsilon_{n,k_y})$ 会随着 β 增加而缩小,直至 $\beta = 1$ 时整个能谱塌缩为 $\epsilon_{n,k_y} = -\hbar v_F k_y$, 这一有趣的现象已经被 Gu 等人通过实验证实^[16]。

为了更清楚地阐述上述结论,我们根据本征能量式(12)绘制出图2。图2展示了在四个不同 β 值条件下,本征能量 ϵ_{n,k_y} 随量子数 n 和 k_y 的变化关系(图中 $a = 2.461 \text{ \AA}$ 表示石墨烯晶格常数)。在子图(a)中 $\beta = 0$ (即 $E = 0, B = 1 \text{ T}$), 此时本征能量 ϵ_{n,k_y} 只与量子数 n 有关并呈现出 $\sqrt{n}$ ($n > 0$) 的依赖性,而与量子数 k_y 无关。在图2(b)中 $\beta = 0.3$ 即 $E = 0.3 \times 10^6 \text{ V/m}, B = 1 \text{ T}$, 本征能量 ϵ_{n,k_y} 此时不仅表现出 $\sqrt{n}$ 的依赖性,还表现出随 k_y 变化的线性关系。由于电场附加能(即 $-\hbar v_F \beta k_y$) 的存在,使得对于任意确定 n 朗道能级上的简并粒子在不同 k_y 处位能不同即表明能量简并消除,进而整个朗道能谱随 k_y 发生倾斜。此外,由于朗道能级间隔 $\Delta(\epsilon_{n,k_y})$ 会随 $(1 - \beta^2)^{3/4}$ 收缩,故而导致能谱开口减小。图2(c) ($\beta = 0.7$ 即 $E = 0.7 \times 10^6 \text{ V/m}, B = 1 \text{ T}$) 进一步地表明,朗道能谱随 k_y 的倾斜程度会随着 β 的增大而增加,但是开口却会随着 β 的增大而逐渐减小;直至 $\beta = 1$ 即 $E = 1 \times 10^6 \text{ V/m}, B = 1 \text{ T}$ 时,整个能谱突然塌缩为 $\epsilon_{n,k_y} = -\hbar v_F k_y$ 且变得与 n 无关,同时能谱的开口也完全闭合(如图2(d)所示)。

通过求解无质量狄拉克方程的本征值问题,

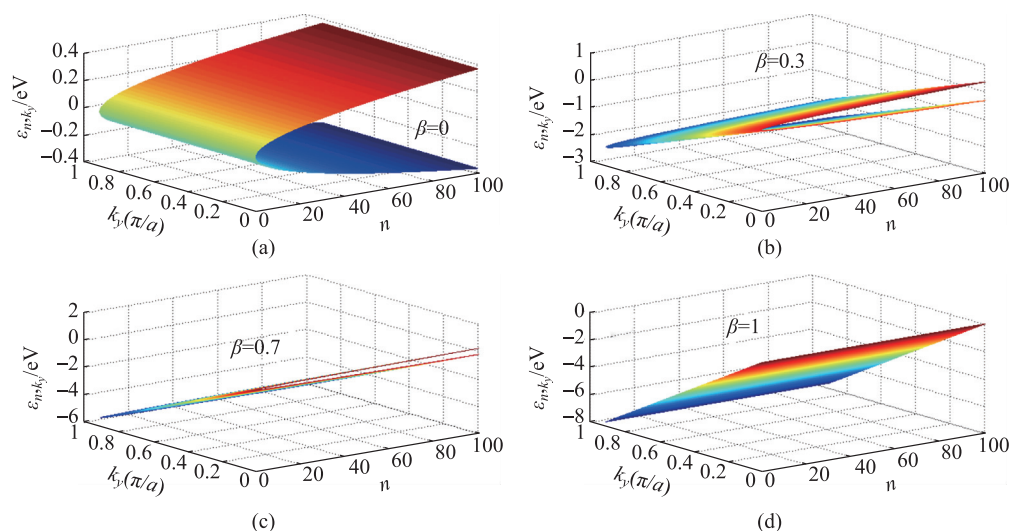


图2 本征能量 ε_{n,k_y} 随量子数 n 和 k_y 的三维函数图($a=2.461\text{\AA}$ 为晶格常数)

(a) $\beta=0$; (b) $\beta=0.3$; (c) $\beta=0.7$; (d) $\beta=1$

学生可以深入了解量子系统的态空间结构及其相关特性。理解本征态和本征值的概念有助于学生对量子态的性质和演化有更深入的认识。解决本征值问题可以确定量子系统的能级结构和本征能量。这对于理解量子系统的稳定性、能态跃迁和谱线分析等方面非常重要。学习本征值问题可以帮助学生建立对于能谱表达和解释的能力。解决本征值问题需要学生具备分析和解决复杂问题的能力。通过解决这类问题,学生可以培养逻辑思维、问题分解和数学建模等方面的技能,这些技能在量子力学以及其他科学领域的研究和应用中都具有重要的价值。

3 结语

本文以科技前沿“明星”材料石墨烯为例,提出了一种严格求解外加电磁场下无质量狄拉克费米子本征能量和本征函数的简便方法。首先,基于朗道和栗弗席兹的相对性量子理论原理,将外加电磁场下哈密顿量满足的狄拉克方程转化为辅助性二阶方程;其次,借助一维谐振子模型众所周知的本征值解巧妙地解析得到了本征能量和本征波函数;最后,将本文得到的本征值与非相对论情况下的结果进行了对比分析和讨论。结果表明,在外加电磁场的石墨烯物理系统中,电场会使得相邻朗道能级间隔发生收缩,并最终导致整个朗道能谱在 $\beta=1$ 的临界值处突然发生塌缩,这一结

论在非相对论性的标准二维电子气系统中并不存在。石墨烯本征值问题的求解,可以帮助学生深入理解量子力学的基本原理和数学方法,同时也激发了学生对量子力学的兴趣和好奇心。学生在解决相关问题的过程中,可以体验到量子力学理论的强大和美妙之处,激发他们对物理学习的热情,进一步培养他们深入科研领域的动力。

参 考 文 献

- [1] NOVOSELOV K S, GEIM A K, MOROZOV S V, et al. Electric field effect in atomically thin carbon films[J]. Science, 2004, 306: 666.
- [2] NOVOSELOV K S, GEIM A K, MOROZOV S V, et al. Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene [J]. Nature, 2005, 438: 197-200.
- [3] ZHANG Y B, TAN Y W, STORMER H L, et al. Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene[J]. Nature, 2005, 438: 201-204.
- [4] LANDAU L D, LIFSHITZ E M. Relativistic Quantum Theory[M]. New York: Pergamon Press, 1971.
- [5] MACDONALD A H. Quantized Hall conductance in a relativistic two-dimensional electron gas[J]. Physical Review B, 1983, 28: 2235.
- [6] ZHANG S, MA N, ZHANG E. The modulation of the de Haas-van Alphen effect in graphene by electric field[J]. Journal of Physics: Condensed Matter, 2010, 22: 115302.
- [7] MA N, ZHANG S L, LIU D Q, et al. Novel electric field effects on magnetic oscillations in graphene nanoribbons[J]. Physics Letters A, 2011, 375: 3624.
- [8] 卢亚鑫, 马宁. 耦合电磁场对石墨烯量子磁振荡的影响[J].

- 物理学报, 2016, 65(2): 027502.
- LU Y X, MA N. The coupled electromagnetic field effects on quantum magnetic oscillations of graphene[J]. *Acta Physica Sinica*, 2016, 65(2): 027502. (in Chinese)
- [9] MA N, ALISULTANOV Z Z, REIS M S. External mechanisms for valley polarisation and its effect on the magnetisation of graphene: Strain and electric field[J]. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2019, 482: 178.
- [10] LUKOSE V, SHANKAR R, BASKARAN G. Novel electric field effects on Landau levels in graphene[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 98: 116802.
- [11] PERES N M R, CASTRO E V. Algebraic solution of a graphene layer in transverse electric and perpendicular magnetic fields[J]. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2007, 19: 406231.
- [12] ALISULTANOV Z Z. Landau levels in graphene in crossed magnetic and electric fields: Quasi-classical approach[J]. *Physica B: Condensed Matter*, 2014, 438: 41-44.
- [13] 马宁. 石墨单层德哈斯-范阿尔芬效应及其电场调控的研究[D]. 西安:西安交通大学, 2009.
- MA N. The Modulation of de Hass-van Alphen Effect in Graphene by Electric Field[D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2009. (in Chinese)
- [14] HARRISON M J. Some novel effects of space charge and crossed electric fields on energy levels and low-temperature diamagnetism in two-dimensional electron systems[J]. *Physical Review B*, 1987, 36: 9399.
- [15] 倪光炯, 陈苏卿. 高等量子力学[M]. 2版. 上海: 复旦大学出版社, 2004: 257-265.
- NI G J, CHEN S Q. *Advanced Quantum Mechanics*[M]. 2nd ed. Shanghai: Fudan University Press, 2004: 257-265. (in Chinese)
- [16] GU N, RUDNEER M, YOUNG A, et al. Collapse of Landau levels in gated graphene structures[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106: 066601.
- (上接第 49 页)
- [7] ECKMANN J P, KAMPHORST S O. Recurrence plots of dynamical systems[J]. *Europhysics Letters*, 1987, 4(9): 973-977. DOI: 10.1209/0295-5075/4/9/004
- [8] FRASER A M, SWINNEY H L. Independent coordinates for strange attractors from mutual information[J]. *Physical Review A*, 1986, 33(2): 1134-1140. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.33.1134>
- [9] CAO L. Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series[J]. *Physica D*, 1997, 110(1-2): 43-50. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(97\)00118-8](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(97)00118-8)
- [10] MARWAN N, ROMANO M C, THIEL M, et al. Recurrence plots for the analysis of complex systems[J]. *Physics reports*, 2007, 438(5-6): 237-329. DOI: 10.1016/j.physrep.2006.11.001
- [11] ZBILUT J P, WEBBER C L. Embeddings and delays as derived from quantification of recurrence plots[J]. *Physics Letters A*, 1992, 171(3-4): 199-203. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(92\)90426-M](https://doi.org/10.1016/0375-9601(92)90426-M)
- [12] ZBILUT J P, WEBBER C L. Recurrence quantification analysis: introduction and historical context[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2007, 17(10): 3477-3481. DOI: 10.1142/S0218127407019238