

基于重现理论的单摆系统非线性动力学特性研究

王立媛

(哈尔滨工程大学物理与光电工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要 本文利用分岔图、相图、重现图和重现量化等方法,研究了有阻尼、不同驱动力作用下单摆往复和旋转运动的非线性动力学特性。结果表明:重现图和重现量化测度能够辨识周期运动和混沌运动特征,随着驱动力的增加,单摆系统经历了由周期到混沌以及再由混沌到周期的演变过程,相图和重现图能够清晰展示系统运动轨线的时空分布,重现量化测度中熵和重现时间增加,而最大对角线长度减小,意味着系统复杂性和轨道分离速度增加。

关键词 单摆;分岔图;相图;重现图;重现量化分析

RESEARCH ON NONLINEAR DYNAMIC CHARACTERISTICS OF SINGLE PENDULUM SYSTEM BASED ON RECURRENCE THEORY

WANG Liyuan

(College of Physics and Optoelectronics, Harbin Engineering University, Harbin, Heilongjiang 150001)

Abstract In this paper, the nonlinear dynamic characteristics of the reciprocating and rotational motions of a damped simple pendulum under different driving forces are investigated using methods such as bifurcation diagrams, phase portraits, recurrence plots, and recurrence quantification analysis. The driving force f increases from 0.6 to 1.8 mg. The results show that recurrence plots and recurrence quantification measures can distinguish the characteristics of periodic and chaotic motions. As the driving force increases, the pendulum system undergoes a transition from periodic to chaotic motion and then back to periodic motion. Phase portraits and recurrence plots can clearly illustrate the spatiotemporal distribution of the system's trajectories. In recurrence quantification analysis, the increase in entropy and recurrence time, along with the decrease in the maximum diagonal line length, indicates an increase in system complexity and the rate of trajectory separation.

Key words simple pendulum; bifurcation diagram; phase diagram; recurrence diagram; recurrence quantitative analysis

近几十年来,非线性动力学理论得到快速发展,随着研究的不断深入,发现非线性是普遍存在

的,而线性只是一种特例,因此非线性科学被誉为20世纪的第三次科学革命^[1,2]。在许多非线性系

收稿日期: 2023-07-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52171298);哈尔滨工程大学校级教学改革项目(JG2023B2510)。

通信作者: 王立媛, wangly433@hrbeu.edu.cn。

引文格式: 王立媛. 基于重现理论的单摆系统非线性动力学特性研究[J]. 物理与工程, 2025, 35(3): 44-49, 56.

Cite this article: WANG L Y. Research on nonlinear dynamic characteristics of single pendulum system based on recurrence theory[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(3): 44-49, 56. (in Chinese)

统中,原本被认为是随机的过程,而实际上系统内隐藏着确定性特征^[1,2]。

单摆是物理学中的一个经典动力学模型,非线性单摆系统可呈现出复杂动力学行为^[3]。因此,通过对单摆系统进行非线性动力学特性分析,能够加深学生对非线性的认识和理解。目前,国内外学者采用不同的方法来揭示单摆运动的复杂性,包括解析方法、庞卡莱截面法和相空间重构等方法。杨博等^[4]利用 Melnikov 解析方法,确定了单摆运动出现混沌行为的临界值。文献[5]利用 Poincare 映射方法研究了单摆系统以倍周期分岔进入混沌的道路。文献[6]利用分岔图、频谱分析和熵等方法,研究了摆长、阻尼系数和初始摆角等参数对单摆运动的影响规律,研究发现:单摆的运动特征对初始摆角、阻尼系数有很强的依赖性。

既有文献中,多数作者采用解析方法、庞卡莱截面法、相空间重构和重现图等分析方法中的一种或两种,对单摆运动的非线性特征进行定性或定量分析。本文提出利用三维柱面相图分析方法,能够更充分地揭示单摆系统轨线的运动特征,同时利用相空间重构、重现和重现量化等多种方法相结合的方式,从定性和定量两个维度,系统地揭示了往复和旋转单摆周期和混沌运动出现的临界条件和时空演化规律。

本文为大学物理实验教学提供了更加丰富和直观的分析手段,可以激发学生学习兴趣和加深他们对单摆运动复杂性的理解,能够为教学改革和提升教学效果提供新思路。

1 单摆系统

本文研究的单摆是忽略摆杆质量的刚性摆,见图 1。

其运动方程为:

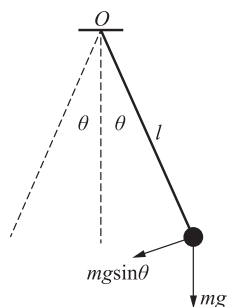


图 1 单摆系统

$$ml\ddot{\theta} + \gamma l\dot{\theta} + mg \sin\theta = F \cos\omega t \quad (1)$$

式中, m 为摆球质量; l 为摆线长度; γ 为阻尼系数; ω 为角速度; $F \cos\omega t$ 为单摆受到周期性外力。

$$\text{令: } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, f = \frac{F}{mg}, \beta = \frac{\gamma}{2m\omega_0}, \tau = \omega_0 t, \\ \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

将方程无量纲化处理,即用 ω_0^2 去除等式每一项,将 $\omega_0 t$ 称为 τ ,则有:

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \sin\theta = f \cos\Omega\tau \quad (2)$$

将高阶微分方程通过增加变量得到一阶微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -2\beta\omega - \sin\theta + f \cos\phi \\ \dot{\phi} = \Omega \end{cases} \quad (3)$$

式中, β 、 Ω 、 f 为控制参数, θ 、 ω 、 ϕ 为状态变量。

当三个控制参数取不同值时,单摆系统将表现出非常复杂的动力学行为。本文利用四阶龙格-库塔法,计算得到参数取不同值时状态变量的数值解,并对其演化规律进行分析。

2 理论与方法

2.1 重现图

基于 Takens 相空间重构理论,Eckmann 等^[7]提出了重现图方法(RP),重现图定义如下:

$$R_{i,j}(\epsilon) = \Theta(\epsilon - \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|) \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

式中, ϵ 为阈值; $\mathbf{X}_i$ 和 $\mathbf{X}_j$ 为向量; $\|\cdot\|$ 为规范; N 为向量的数量; $\Theta(x)$ 是海维赛德函数,定义如下:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

在 m 维相空间中,当 $R_{i,j} = 1$ 时,用黑点显示,当 $R_{i,j} = 0$ 时,用白点显示。当 i 和 j 取不同值时,获得由白黑点表示的 $N \times N$ 二维方形重现矩阵图^[8]。计算 RP 时,嵌入维 m 、延迟时间 τ 和重现阈值 ϵ 是非常重要的重构参数。本文利用互信息函数确定 τ ^[9],利用错误近邻法确定 m ^[10],利用 10% 重现率来确定 ϵ 。

2.2 重现量化测度

RP 提供了一种能够有效揭示相空间轨线演化规律和时间相关性的工具,而重现量化分析

(RQA)从对角线和竖直方向定义重现测度^[11,12],实现对单摆系统进行定量分析非线性动力学特征。

本文选择最大对角线长度、熵和平均重现时间为单摆运动的重现量化参数,定义如下:

(1) 最大对角线长度($L_{\max}$):

$$L_{\max} = \operatorname{argmax} H_D(l) \quad (6)$$

式中, $H_D(l) = \sum_{i,j=1}^N (1 - R_{i-1,j-1})(1 - R_{i+l,j+l}) \cdot \prod_{k=0}^{l-1} R_{i+k,j+k}$

$L_{\max}$ 代表 RP 中最大对角线长度。 $L_{\max}$ 越小,意味着不同时段两轨道段的发散速率越快。

(2) 熵(ENTR):

$$\text{ENTR} = - \sum_{l=l_{\min}}^N p(l) \ln p(l) \quad (7)$$

式中, $P(l) = \frac{H_D(l)}{\sum_{l=l_{\min}}^N H_D(l)}$ 。ENTR 是反映系统复杂性的一个测度。

(3) 竖直方向的平均重现时间($\bar{T}$):

对于一维时间序列 $x_i (i=1,2,\dots)$, 重现点集为 $S_1 = \{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_i} \dots\}$, 考虑系统的切向运动引起的逗留点, 剔除重现点集 S_1 中逗留的重现点 $X_{t_i+1}, \dots, X_{t_i+k}$ (保留 X_{t_i}), 获得重现点集为 $S_2 = \{X_{t'_1}, X_{t'_2}, \dots, X_{t'_i}, \dots\}$, 最后计算重现时间的集合为: $\{T(i) = t'_{i+1} - t'_i, i=1,2,\dots\}$, $\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T(i)$ 。

3 结果分析

3.1 单摆运动的分岔图和相图

在式(3)中取阻尼系数 $\beta=1/4$, 角速度比 $\Omega=2/3$, 驱动力 f 从 0.6~1.8, 将角位置和角速度 (θ, ω) 初始值取(0.1, 1.5), 利用四阶龙格-库塔法

计算得到角位置和角速度的数值解。本文分析的数据已经去除了初始阶段的暂态过程。图 2 是单摆运动分岔图, 给出了单摆运动角速度 ω 随驱动力幅值 f 的变化关系, 由图可见: 当驱动力从 0.6 增加到 1.8 时, 单摆运动明显经历了倍周期-混沌-倍周期的循环往复过程, 为了揭示不同驱动力作用下单摆系统的动力学特征, 本文将取 f 分别为 1.025、1.07、1.08、1.15、1.35、1.45、1.47 和 1.5 时对应的时间序列进行深入分析。

图 3 是单摆在 8 个不同驱动力 f 作用下的时

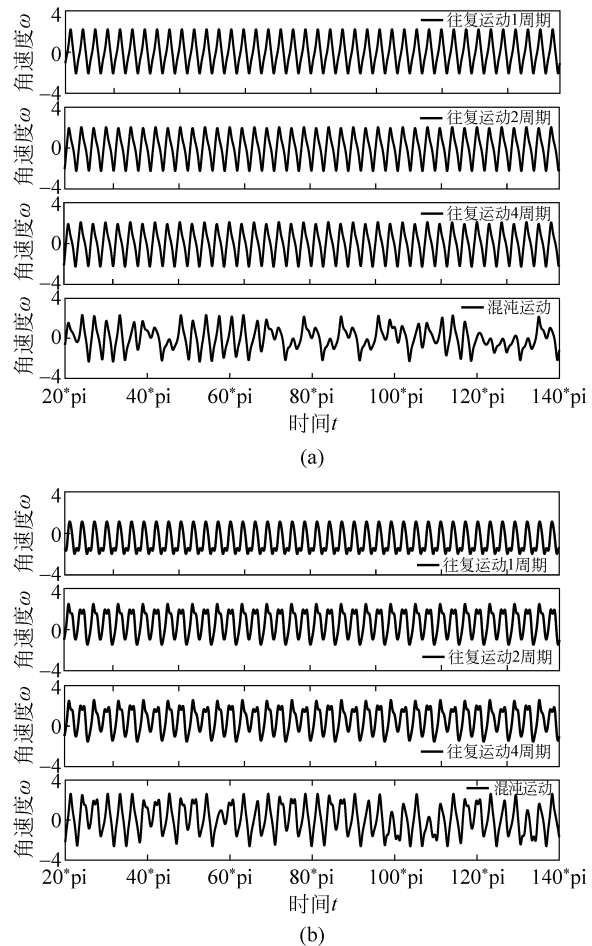


图 3 单摆周期往复和旋转以及混沌运动时间序列
(a) 往复运动到混沌; (b) 旋转运动到混沌

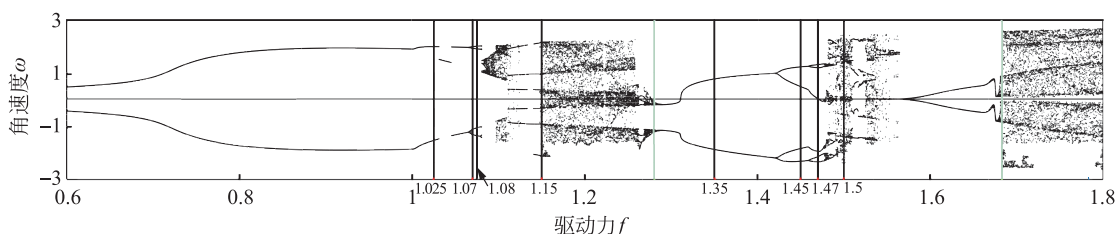


图 2 单摆运动分岔图

间序列,其中图 3(a)是 f 为 1.025、1.07、1.08 和 1.15 所对应的往复运动 1 周期、2 周期、4 周期和混沌时间序列;图 3(b)是 f 为 1.35、1.45、1.47 和 1.5 所对应旋转运动 1 周期、2 周期、4 周期和混沌时间序列。由图可见,无论是往复还是旋转周期运动,都比较容易观察出其运动特征,但是很难从混沌时间序列中辨识出其演化规律。

图 4 是单摆做往复和旋转运动的三维相图,由图 4(a)可见,单摆做往复 1 周期、2 周期和 4 周期运动时,相图与庞卡莱截面产生 1 个、2 个和 4 个不动点,不动点的数量和周期数对应,而混沌运动则与庞卡莱截面产生无穷多个不动点;图 4(b)是单摆做旋转 1 周期、2 周期和 4 周期和混沌运动时的柱面相图。可以发现,当单摆做周期运动时,柱面相图上可明显观察到单摆的终态具有 1 周期、2 周期和 4 周期解的轨迹,而当单摆做混沌运动时,相轨线杂乱无章的分布在柱面上。

3.2 重现特性分析

进行重现特征分析时,首先利用互信息函数和错误近邻法确定嵌入维 m 和延迟时间 τ ,选择重现率的 10% 对应的小球半径作为重现阈值 ϵ ,8 个时间序列的重现量化参数如表 1 所示,表中 σ

表示数据的标准偏差。

表 1 重构参数

运动状态	嵌入维 m	延迟时间 τ	重现阈值 ϵ
往复运动 1 周期	3	1	0.25σ
往复运动 2 周期	4	1	0.28σ
往复运动 4 周期	3	1	0.24σ
混沌运动 ($f=1.15$)	3	24	0.71σ
旋转运动 1 周期	4	7	0.4σ
旋转运动 2 周期	4	11	0.6σ
旋转运动 4 周期	5	8	0.7σ
混沌运动 ($f=1.5$)	4	29	0.85σ

图 5 是单摆往复和旋转周期以及混沌运动的重现图,对于往复和旋转周期运动,重现图显示出结构规则的图案,但二者略有差异,而混沌运动的重现图明显不同于周期运动,其内部结构则更为丰富和复杂。由图 5(a)所示,往复周期运动重现图上出现多条平行于主对角线且间距为定值的平行线,同时在近似垂直于主对角线方向出现了虚线,整个重现图呈现较规则的棋盘结构;而图 5(b)中旋转周期运动的重现图中只出现了多条与对角

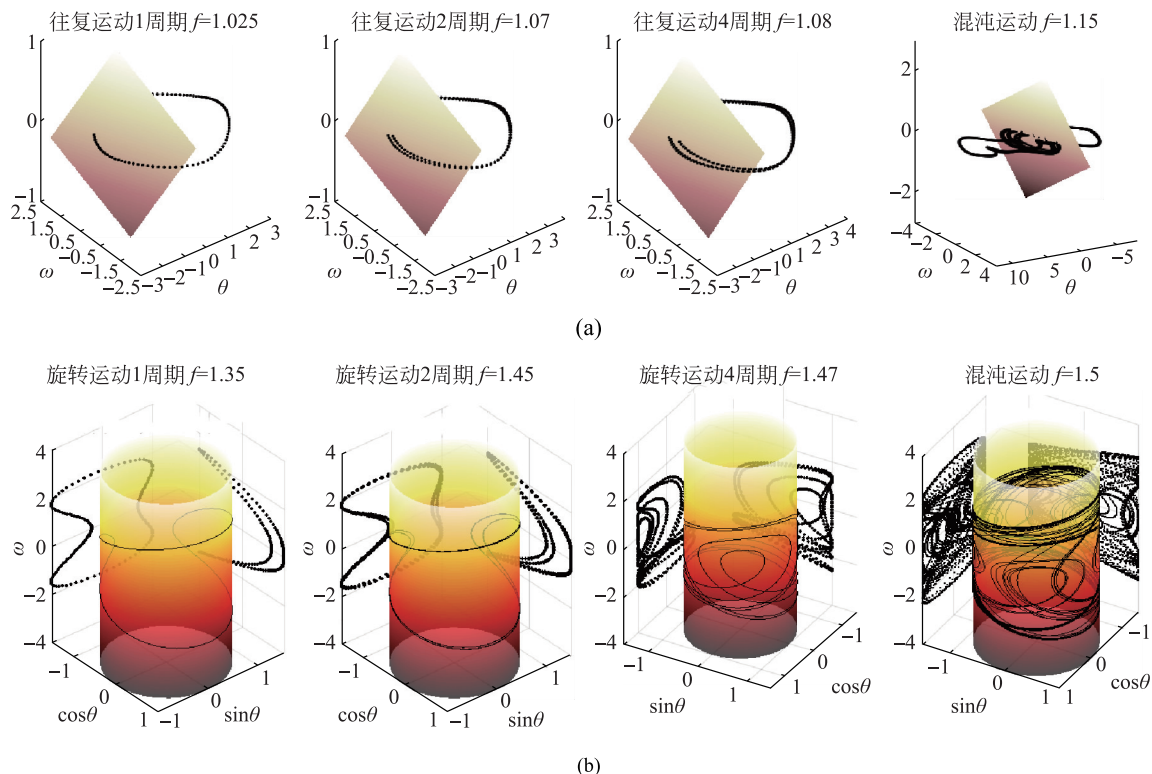


图 4 单摆周期往复和旋转以及混沌运动三维相图

(a) 往复运动; (b) 旋转运动

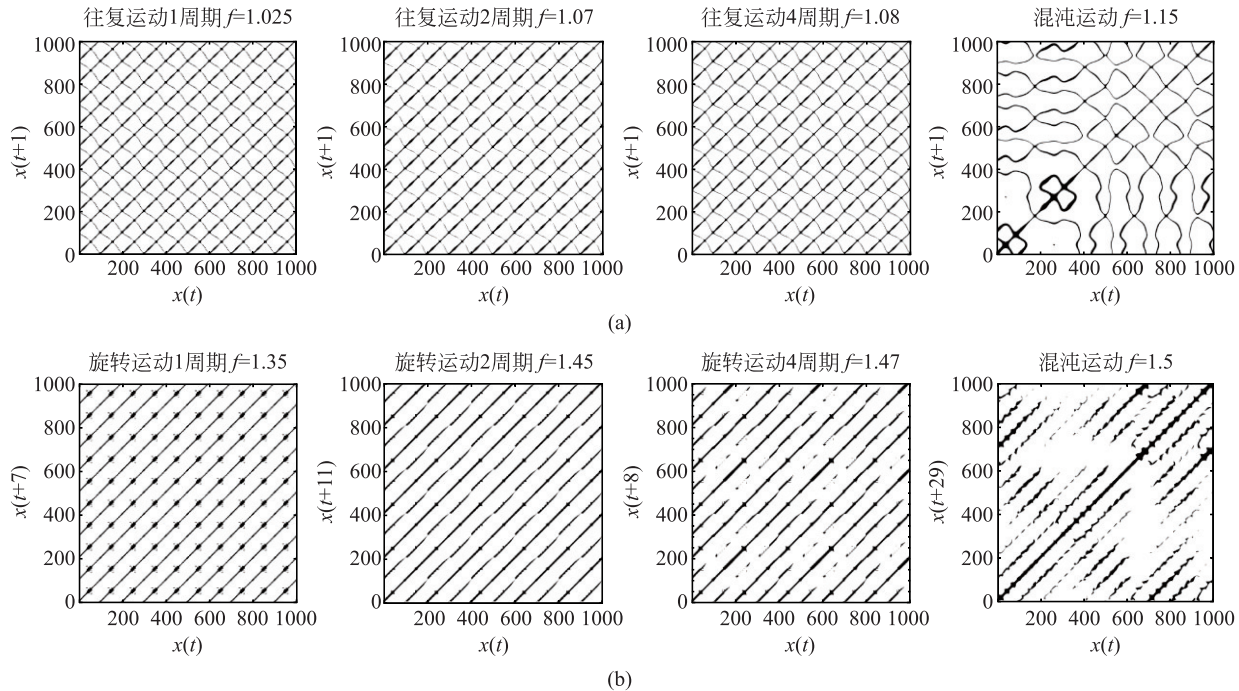


图5 单摆周期往复和旋转以及混沌运动重现图

(a) 往复运动; (b) 旋转运动

线平行且连续的直线. 在往复混沌运动的重现图中, 可以观察到不规则曲线, 在旋转混沌运动的重现图中, 在主对角线两侧可观察到平行线, 但是平行线是长短不一且有间断. 可见, 重现图可对单摆系统动力学行为进行更加直观和形象的表征, 有助于对系统复杂动力学行为进行辨识.

为了弥补重现图只能对单摆运动规律提供视觉信息和定性分析等方面的缺陷, 本文进一步开展了单摆系统重现图量化测度计算和分析. 图6是单摆往复和周期运动重现图量化测度对比图, 由图可见, 当单摆从往复和旋转1周期到4周期变化过程中, 最大对角线长度 $L_{\max}$ 缓慢降低, 而一旦过渡到混沌运动状态, $L_{\max}$ 急剧下降, 表明系统

对初始条件敏感性和轨道分离速率迅速增加; 随着周期的增加直至混沌, 熵 $ENTR$ 和平均重现时间 T 单调增加, 表明系统的复杂性增加, 而且轨线再次回到初始状态的平均时间增加.

为了进一步获得确切的重现时间的数值, 本文给出了不同周期和混沌条件下的重现时间分布图, 如图7所示. 由图可见, 无论是往复还是旋转周期运动, 重现时间的数量是相同的, 例如: 1周期运动都有1个重现时间, 为100; 2周期运动都有两个不同重现时间100和200, 依此类推; 4周期则有四个重现时间(往复运动: 100、200、300和400, 旋转运动: 98、102、200和400); 对于混沌运动则有无数个不同的重现时间.

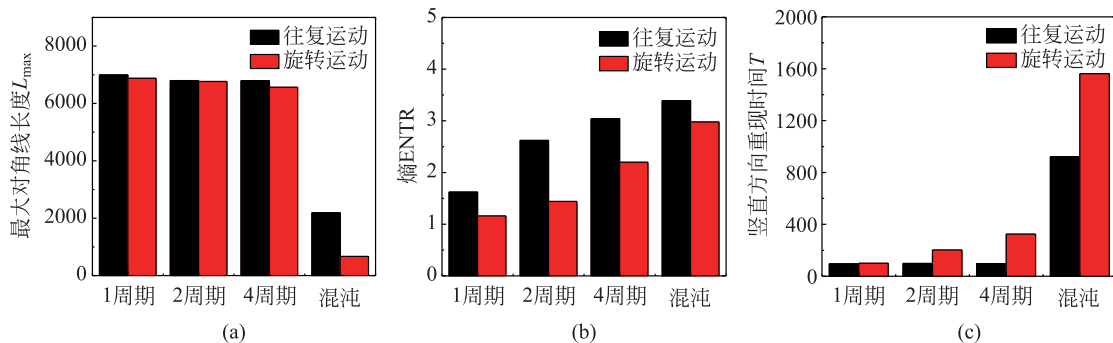


图6 单摆周期往复和旋转以及混沌运动重现图量化测度对比

(a) 最大对角线长度; (b) 熵; (c) 平均重现时间

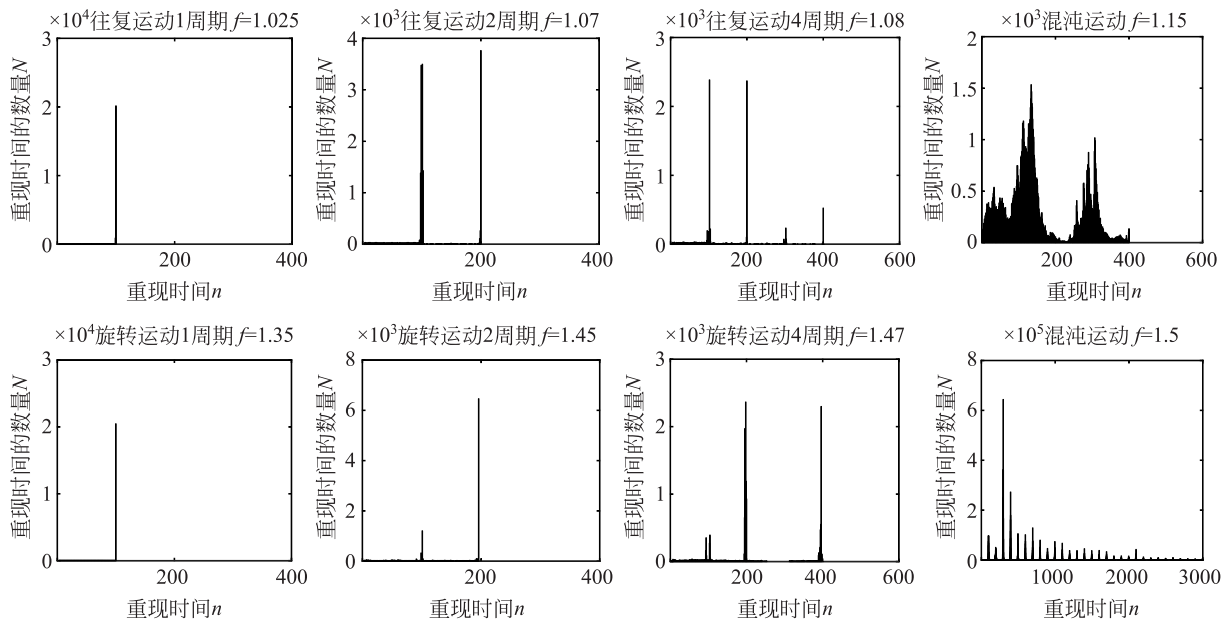


图7 单摆周期往复和旋转以及混沌运动重现时间图

4 结论

本文通过四阶龙格-库塔法计算得到单摆方程的数值解,针对8个不同驱动力下有阻尼单摆运动时间序列,利用分岔图、时序图、相图、重现图和重现量化等分析方法,揭示了往复和旋转运动由周期到混沌过程中运动轨迹的时空特征、演化规律和复杂性,得出如下结论:

(1) 随着驱动力的增加,单摆运动经历了1周期、2周期、4周期直至混沌的变化过程,周期运动相图中 Poincare 截面上出现与周期数相对应的交点数量,而混沌运动轨线与 Poincare 截面形成无数个交点;

(2) 往复和旋转运动的重现图特征具有明显差异,往复周期运动具有棋盘结构,而且混沌运动具有更复杂和丰富的结构,相比较而言,旋转周期运动的重现图中形成多个规则的与主对角线平;

(3) 行的直线,而混沌运动重现图中出现多个长短不一且间断的平行线段;

(4) 当单摆运动由周期到混沌过程中,无论是往复还是旋转运动,随着周期数的增加直至混沌,最大对角线长度降低、熵和平均重现时间增加,表明系统对初始条件敏感性和轨道分离速率和复杂性增加、重现周期变长。

本研究获得的结果为辨识不同条件下单摆运动的非线性动力学特征提供了重要的依据。

参 考 文 献

- [1] YANG L P, WANG L Y, WANG J Q, et al. Nonlinear dynamics of cycle-to-cycle variations in a lean burn natural gas engine with a non-uniform pre-mixture[J]. Nonlinear Dynamics, 2021, 104: 2241-2258. DOI: 10.1007/s11071-021-06377-4
- [2] 李明达,董乔南.利用非线性动力学系统研究混沌现象[J].物理与工程,2019,29(6):78-88.
LI M D, DONG Q N. Research on chaos phenomena using nonlinear dynamics systems[J]. Physics and Engineering, 2019, 29(6): 78-88. (in Chinese)
- [3] 赵凯华.从单摆到混沌[J].物理前沿,1993,(1):22-26.
ZHAO K H. From simple pendulum to chaos[J]. Frontiers of Physics, 1993, (1): 22-26. (in Chinese)
- [4] 杨博,高娟.从单摆到混沌的动力学研究[J].山西师范大学学报,2017,31(1):55-64.
YANG B, GAO J. Dynamics research from pendulum to chaos[J]. Journal of Shanxi Normal University, 2017, 31(1): 55-64. (in Chinese)
- [5] 符五久,饶黄云.单摆系统通向混沌的道路[J].大学物理,2008,27(1):5-9.
FU W J, RAO H Y. The road to chaos in a pendulum system[J]. College Physics, 2008, 27(1): 5-9. (in Chinese)
- [6] 李纪强,周斌,丁益民.单摆混沌现象的研究[J].湖北大学学报,2013,35(4):514-517.
LI J Q, ZHOU B, DING Y M. Research on the chaos phenomenon of simple pendulum[J]. Journal of Hubei University, 2013, 35(4): 514-517. (in Chinese)

(下转第56页)

- 物理学报, 2016, 65(2): 027502.
- LU Y X, MA N. The coupled electromagnetic field effects on quantum magnetic oscillations of graphene[J]. *Acta Physica Sinica*, 2016, 65(2): 027502. (in Chinese)
- [9] MA N, ALISULTANOV Z Z, REIS M S. External mechanisms for valley polarisation and its effect on the magnetisation of graphene: Strain and electric field[J]. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2019, 482: 178.
- [10] LUKOSE V, SHANKAR R, BASKARAN G. Novel electric field effects on Landau levels in graphene[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 98: 116802.
- [11] PERES N M R, CASTRO E V. Algebraic solution of a graphene layer in transverse electric and perpendicular magnetic fields[J]. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2007, 19: 406231.
- [12] ALISULTANOV Z Z. Landau levels in graphene in crossed magnetic and electric fields: Quasi-classical approach[J]. *Physica B: Condensed Matter*, 2014, 438: 41-44.
- [13] 马宁. 石墨单层德哈斯-范阿尔芬效应及其电场调控的研究[D]. 西安:西安交通大学, 2009.
- MA N. The Modulation of de Hass-van Alphen Effect in Graphene by Electric Field[D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2009. (in Chinese)
- [14] HARRISON M J. Some novel effects of space charge and crossed electric fields on energy levels and low-temperature diamagnetism in two-dimensional electron systems[J]. *Physical Review B*, 1987, 36: 9399.
- [15] 倪光炯, 陈苏卿. 高等量子力学[M]. 2版. 上海: 复旦大学出版社, 2004: 257-265.
- NI G J, CHEN S Q. *Advanced Quantum Mechanics*[M]. 2nd ed. Shanghai: Fudan University Press, 2004: 257-265. (in Chinese)
- [16] GU N, RUDNEER M, YOUNG A, et al. Collapse of Landau levels in gated graphene structures[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106: 066601.
- (上接第 49 页)
- [7] ECKMANN J P, KAMPHORST S O. Recurrence plots of dynamical systems[J]. *Europhysics Letters*, 1987, 4(9): 973-977. DOI: 10.1209/0295-5075/4/9/004
- [8] FRASER A M, SWINNEY H L. Independent coordinates for strange attractors from mutual information[J]. *Physical Review A*, 1986, 33(2): 1134-1140. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.33.1134>
- [9] CAO L. Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series[J]. *Physica D*, 1997, 110(1-2): 43-50. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(97\)00118-8](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(97)00118-8)
- [10] MARWAN N, ROMANO M C, THIEL M, et al. Recurrence plots for the analysis of complex systems[J]. *Physics reports*, 2007, 438(5-6): 237-329. DOI: 10.1016/j.physrep.2006.11.001
- [11] ZBILUT J P, WEBBER C L. Embeddings and delays as derived from quantification of recurrence plots[J]. *Physics Letters A*, 1992, 171(3-4): 199-203. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(92\)90426-M](https://doi.org/10.1016/0375-9601(92)90426-M)
- [12] ZBILUT J P, WEBBER C L. Recurrence quantification analysis: introduction and historical context[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2007, 17(10): 3477-3481. DOI: 10.1142/S0218127407019238