

有限大带电体和无限大带电体的电势 ——也谈均匀带电无限长直导线的电势问题

曹清华

(江苏大学计算机科学与通信工程学院, 江苏 镇江 212013)

摘 要 建立清晰牢固的物理概念,以简洁的形式解决物理问题,是物理教学的基本目的。本文以求均匀带电无限长直导线的电势为例,按照《电磁场与电磁波》教材的体例,由Helmholtz定理引入电势,由单位正电荷在电场作用下所做的功引出电势的定义式,通过对有限大和无限大带电体电场的讨论,说明从电势的定义出发,便不会出现病态的数学定义,能够解决因套用有限大带电体的电势公式所致的发散积分问题。无限大带电体是简单化、理想化和相对化的结果,故不能像有限大带电体那样选无限远处为电势参考点,而是要选有限远处为参考点。选定参考点后,有限和无限大带电体的电势如同电势差一样都是可以测量的。

关键词 电动力学;电磁场与电磁波;电势的定义;有限大和无限大带电体;均匀带电无限长直导线;理想化和相对化

ELECTRIC POTENTIALS OF THE FINITE AND INFINITE CHARGED BODIES: ALSO DISCUSSING THE ELECTRIC POTENTIAL PROBLEM OF UNIFORMLY CHARGED INFINITELY LONG STRAIGHT WIRE

CAO Qinghua

(School of Computer Science and Communication Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013)

Abstract Establishing clear and solid physical concepts and solving physical problems in a concise form are the fundamental objectives of physics teaching. This paper takes the calculation of the electric potential of a uniformly charged infinite long straight wire as an example. Following the format of the textbook on “Electromagnetic Fields and Waves,” it introduces the electric potential through Helmholtz’s theorem and derives the definition of electric potential based on the work done by a unit positive charge in an electric field. By discussing the electric fields of both finite and infinite charged bodies, it demonstrates that starting from the definition of electric potential avoids pathological mathematical definitions and can resolve the issue of divergent integrals caused by the misuse of the electric potential formula for finite charged bodies. Infinite charged bodies are the result of simplification, idealization, and rela-

收稿日期: 2024-10-25

基金项目: 江苏大学高等教育教改研究课题(2023JGYB014);江苏大学课程思政教学改革研究课题(2022SZYB022)。

通信作者: 曹清华, cqh@ujs.edu.cn。

引文格式: 曹清华. 有限大带电体和无限大带电体的电势——也谈均匀带电无限长直导线的电势问题[J]. 物理与工程, 2025, 35(3): 38-43.

Cite this article: CAO Q H. Electric potentials of the finite and infinite charged bodies: Also discussing the electric potential problem of uniformly charged infinitely long straight wire[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(3): 38-43. (in Chinese)

tivization, and thus, they cannot have their electric potential reference points selected at infinity like finite charged bodies. Instead, a finite distance must be chosen as the reference point. Once the reference point is determined, the electric potential of both finite and infinite charged bodies, like potential difference, becomes measurable.

Key words electrostatics; electromagnetic fields and wave; definition of electric potential; finite and infinite charged bodies; uniformly charged infinitely long straight wire; idealization and relativization

2024 年《物理与工程》第 34 卷第 1 期,“均匀带电的无限长直导线电势问题的正规化处理——一个将量子场论概念与方法融入本科教学的例子”一文^[1],讨论了《电动力学》经典教材^[2]第二章静电势例 2 中均匀带电的无限长直导线^①的电荷线的发散积分问题,将“量子场论中的一些概念和方法”,如“良好的与病态的数学定义、发散积分的正规化、物理量与非物理量等引入电动力学的课程教学中,以便使在未来学习量子场论等现代物理课程时,可以更轻松自然地理解并使用其中的思想方法,并对数学与物理中一些一般性的相关问题有更好的理解”。本文出于同样的目的,按照《电磁场与电磁波》^[3]的体例,从无界空间静态场的唯一性定理: Helmholtz 定理引出静电场的电势,从电势定义出发,给出了导出有限大带电体电势公式的过程。指出无论有限大还是无限大带电体的电势,本质上都是两场点间的电势差,只是有限大带电体取无限远点为电势参考点而无限大带电体选有限远处为参考点。经典教材^[2]的发散积分,是用有限大带电体电势公式求无限大带电体电势所致。作为相对化的结果,无限大带电体的电场强度不再符合 $|\mathbf{E}(\mathbf{r})| \propto 1/R^n$ ($n > 1$) 的规律,无限大带电体的电场表达式在无限远处也不再成立,故参考点不能设置在无限大假设的失效区。若将参考点选在无限大假设成立的有限远处,便不会出现病态的数学定义导致的发散积分。

物理学中的数学公式是物理定律的体现,不能脱离物理概念单纯地讨论数学公式,更要注意数学公式的适用范围。如无限大带电体的电场公式,在无限远处便不成立。因此,本文通过对有限大和无限大带电体电场和电势的讨论,建立清晰牢固的物理概念,以简洁的形式解决物理问题,达到物理教学的基本目的。

1 静电场的电势与电势参考点

按照文献^[3]的体例,本文从 Helmholtz 定理引出静电场的电势。

Helmholtz 定理:若矢量场 $\mathbf{F}$ 在无界空间中处处单值且导数连续有界,源分布在有限区域中,当矢量场的散度及旋度给定后,该矢量场可表示为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1a)$$

式中

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}') dV'}{R} - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}}{R} \quad (1b)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') dV'}{R} + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{S}}{R} \quad (1c)$$

式中, $\mathbf{r}$ 为场点位置矢量, $\mathbf{r}'$ 为源点位置矢量, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, V' 是无界空间中的有限区域, S 是包围无限大空间区域 V 的无限大曲面,如图 1 所示。

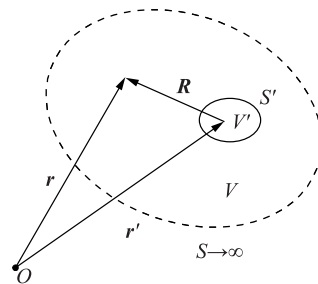


图 1 无界空间和其中源分布的有限区域

由于源在有限区域中分布,在远处

$$|\mathbf{F}(\mathbf{r})| \propto \frac{1}{R^{1+\epsilon}} \quad (\epsilon > 0) \quad (1d)$$

① 静电场中的带电体不一定为导体,即使导体带电还需绝缘以防电荷流失。通常情况下,均匀带电无限长直导线表述为无限长均匀带电直线,因此本文后续都用后者。

因此式(1b)和式(1c)中无限大面积分

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}}{R} = 0$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{S}}{R} = 0$$

故有

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} dV' \quad (1e)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} dV' \quad (1f)$$

Helmholtz 定理适用于任何静态矢量场,静电场是静态矢量场。根据静电场无旋 $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ 的性质,由 Helmholtz 定理(1),电场强度 $\mathbf{E}$ 可表示为一个标量场 Φ 的梯度

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \quad (2)$$

设单位正电荷 q 在电场 $\mathbf{E}$ 作用下从场点 $\mathbf{r}$ 移到另一场点 $\mathbf{r}_0$, 电场力所做的功为

$$A = \int_r^{r_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_r^{r_0} \nabla\Phi \cdot d\mathbf{l} = - \int_r^{r_0} \frac{\partial\Phi}{\partial l} dl$$

$$= - \int_r^{r_0} d\Phi = \Phi(\mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{r}_0)$$

上式表明,电场力对单位正电荷 q 所做的功,等于位移起点的标量场 $\Phi(\mathbf{r})$ 减去终点的标量场 $\Phi(\mathbf{r}_0)$, 反映了电场的做功能力。上式还可写为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_r^{r_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \Phi(\mathbf{r}_0) \quad (3a)$$

即:电场中某一点的标量场 $\Phi(\mathbf{r})$ 表示单位正电荷 q 在该点具有的势能,故称为电势。当 $\mathbf{r}_0$ 点为电势零点,即选该点为电势参考点时,有

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_r^{r_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3b)$$

由此给出电势的定义:电场中某一点 $\mathbf{r}$ 的电势等于单位正电荷 q 在电场 $\mathbf{E}$ 作用下从该点位移到参考点 $\mathbf{r}_0$ 的过程中电场力所做的功。

由自由空间(或线性媒质)中电场的可叠加性,上述由点电荷电场得出的结论可从一个点电荷推广到 n 个点电荷,从离散分布的电荷推广到连续分布的电荷。以下是自由空间中一个和 n 个点电荷、线电荷分布、面电荷分布和体电荷分布的电场^[3]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\hat{R}}{R^2} \quad (4a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i \hat{R}_i}{R_i^2} \quad (4b)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_V(\mathbf{r}') \hat{R}}{R^2} dV' \quad (4c)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_S(\mathbf{r}') \hat{R}}{R^2} dS' \quad (4d)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l'} \frac{\rho_l(\mathbf{r}') \hat{R}}{R^2} dl' \quad (4e)$$

式中 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, $\hat{R} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$, $\rho_V(\mathbf{r}')$ 为电荷体密度, $\rho_S(\mathbf{r}')$ 为电荷面密度, $\rho_l(\mathbf{r}')$ 为电荷线密度。这是源在有限区域中分布的电场,由式(1d)可知

$$|\mathbf{E}(\mathbf{r})| \propto \frac{1}{R^n} = k \frac{1}{R^n} \quad (n > 1) \quad (5a)$$

式中 k 是系数。若将这样的电场 $\mathbf{E}$ 代入电势定义式(3b),那么当 $\mathbf{r}_0 \rightarrow \infty$ 时

$$\Phi(\mathbf{r}) = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \int_r^{r_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \int_R^\infty \frac{k}{R^n} \hat{R} \cdot d\mathbf{R}$$

$$= \int_R^\infty k \frac{dR}{R^n} = \frac{k}{-n+1} \cdot \frac{1}{R^{n-1}} \Big|_R^\infty \quad (5b)$$

当 $n > 1$ 时积分是收敛的,因此便可选择无限远处为参考点,也就是说有限大带电体的电势可选无限远处为参考点。但若式(5a)中 $n \leq 1$,再代入式(3b)时,会导致式(5b)积分发散^[4]。

将电场强度公式(4)代入电势的定义式(3),则自由空间中有限大带电体的电势:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{q\hat{R}}{R^2} \cdot d\mathbf{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{q}{R^2} dR$$

$$= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \Big|_R^\infty = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (6a)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \int_{R_i}^\infty \frac{q_i \hat{R}_i}{R_i^2} \cdot d\mathbf{R}_i$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \int_{R_i}^\infty \frac{q_i}{R_i^2} dR_i$$

$$= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i} \Big|_{R_i}^\infty = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i} \quad (6b)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \iiint_V \frac{\rho_V(\mathbf{r}') \hat{R}}{R^2} dV' \cdot d\mathbf{R}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \iiint_V \frac{\rho_V(\mathbf{r}')}{R^2} dV' dR$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \left[- \frac{\rho_V(\mathbf{r}')}{R} \right]_R^\infty dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_V(\mathbf{r}')}{R} dV' \quad (6c)$$

$$\begin{aligned}
 \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R \int_{S'} \frac{\rho_S(\mathbf{r}') \hat{R}}{R^2} dS' \cdot d\mathbf{R} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R \int_{S'} \frac{\rho_S(\mathbf{r}')}{R^2} dS' dR \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \left. \frac{\rho_S(\mathbf{r}')}{R} \right|_R^\infty dS' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_S(\mathbf{r}')}{R} dS' \quad (6d)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R \int_{l'} \frac{\rho_l(\mathbf{r}') \hat{R}}{R^2} dl' \cdot d\mathbf{R} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R \int_{l'} \frac{\rho_l(\mathbf{r}')}{R^2} dl' dR \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l'} \left. \frac{\rho_l(\mathbf{r}')}{R} \right|_R^\infty dl' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l'} \frac{\rho_l(\mathbf{r}')}{R} dl' \quad (6e)
 \end{aligned}$$

电荷连续分布的各式中,式(4c)和式(6c)的体密度分布是最基本的。当电荷分布在薄层里,不考虑薄层内的电场,仅考虑到薄层的距离远大于层厚处的电场,便可忽略层厚,认为电荷是式(4d)和式(6d)中的面分布。当电荷分布在细线中,不考虑线中电场而仅考虑离细线的距离远大于线径处的电场,便可忽略线径,认为电荷是式(4e)和式(6e)中的线分布。

经典教材^[2]第二章例2引用的第二章式(1.7)为体密度分布的公式,对于带电线便相当于线密度分布的式(6e)。但从电势公式(6)的导出过程,可知这都是有限大带电体以无限远处为电势参考点的电势,若用来求无限长带电体的电势便会出现文献[1]所论的“发散积分”。为建立明确的物理概念,避免“发散积分”需从电势的定义式(3)出发先求其电场然后从电场求电势。

2 从电势的定义式出发求无限长均匀带电直线的电势

对于文献[1]所引文献[2]中实例,“截面积可忽略的无限长直导线上均匀带电,线电荷密度为 τ ,试求空间中电势分布”。可以利用 Gauss 定理求解,或先求有限长均匀带电直线的电场,然后取极限。

(1) 求无限长均匀带电直线的电场,最简便的是利用对称性通过 Gauss 定理求解:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

求解。由于均匀带电直线的电荷分布具有柱对称性,故所产生的电场也具有柱对称性,并与 z 无关。取圆柱坐标系,做半径为 ρ 高为 h 的 Gauss 面,如图 2(a)所示。由上式:

$$\begin{aligned}
 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= E_\rho \cdot 2\pi ah = \frac{\tau h}{\epsilon_0} \\
 E_\rho &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho} \quad (7a)
 \end{aligned}$$

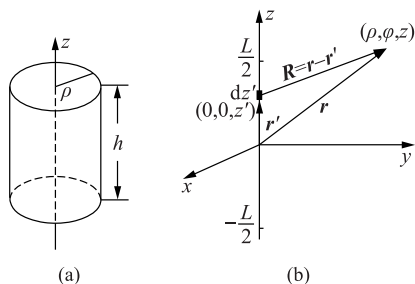


图2 均匀带电直线 Gauss 面与坐标系

(a) 无限长均匀带电直线与 Gauss 面; (b) 有限长均匀带电直线与坐标系

(2) 先求有限长均匀带电直线的电场,再取极限得无限长均匀带电直线的电场。根据真空中电场的可叠加性,这种方法不限于均匀带电直线,只要是带电线都可用这种方法列出积分表达式。如图 2(b)所示,在源点 $(0, 0, z')$ 处取线元 $dl' = dz'$,场点坐标为 (ρ, φ, z) ,那么有:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}' &= z' \hat{z} \\
 \mathbf{r} &= \rho \hat{\rho} + z \hat{z} \\
 \mathbf{R} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \rho \hat{\rho} + (z - z') \hat{z} \\
 R &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}
 \end{aligned}$$

根据题意 $\rho_l(\mathbf{r}') = \tau$,由式(4e)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\hat{R}}{R^2} dz' = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mathbf{R}}{R^3} dz' \\
 &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho \hat{\rho} + (z - z') \hat{z}}{(\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2})^3} dz' \\
 &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \cdot
 \end{aligned}$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[\frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{\rho^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{\rho^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} \right] + \right.$$

$$\hat{z} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} \right] \Bigg\} \\ = \hat{\rho} \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho} \quad (7b)$$

必然地,两种方法的结果式(7a)和式(7b)相同。

对照式(5)可知无限长均匀带电直线的电场与 $1/R^1$ 成正比,若选无限远处为参考点则会使积分发散;若选直线所在处为参考点,则电场本身趋于无限大,积分仍然发散,所以只能取不含直线的有限远处某一点(在圆柱坐标中此点与无限长直线距离记为 ρ_0)为参考点。将式(7)代入电势定义式(3)后,有

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\rho}^{\rho_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad (8)$$

显然,计算过程不会出现发散积分,计算结果也不会出现无限大值。

再考察电荷面密度为常数 ρ_s 的无限大均匀带电圆盘的电场^[3]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \hat{z} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}, & z > 0 \\ -\hat{z} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}, & z < 0 \end{cases} \quad (9)$$

由于电场与 $1/R^0$ 成正比,且为均匀电场。故应取有限远处某一点为参考点(例如取圆盘面电势为0),代入电势定义式(3),在圆柱坐标系中有

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_z^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \begin{cases} \int_z^0 \hat{z} \cdot d\mathbf{z}, & z > 0 \\ -\int_z^0 \hat{z} \cdot d\mathbf{z}, & z < 0 \end{cases} \\ = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \begin{cases} z|_z^0, & z > 0 \\ -z|_z^0, & z < 0 \end{cases} = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} |z| \quad (10)$$

同样,计算过程不会出现发散积分,计算结果也不会出现无限大值。

由此可见,电势是电势差的特例,电势是可测量的,选定参考点后,用电势差的测量方式即可测得。例如,恒定电流场的电势可用电压表测量,静电场的电势测量可以用模拟法采用静电描述仪测量^[5]。

3 无限大带电体

3.1 无限大带电体与 Helmholtz 定理

Helmholtz 定理给出了唯一确定无界空间中

静态矢量场的条件:无界空间中的场由分布在有限区域中的源唯一地确定。在求解带电圆环、带电圆盘、带电线等带电体的电场时,需要选取坐标系。但场是待求量,无法知晓场的分布特征。而根据 Helmholtz 定理,可知场由源唯一地确定,则可知源的分布特征决定了场的分布特征。无限长均匀带电直线的电荷分布是柱对称的,因此电场也是柱对称的,据此可选圆柱坐标系。然而,要求源在有限区域中分布的 Helmholtz 定理,是否适用于无限长均匀带电直线源问题?这与理想化、简单化、相对化的科学方法有关。例如力学中^[6],忽略了弹性和质量的一条“柔软的轻绳”,一个在外力作用下形状不会改变的“刚性球体”,一道没有摩擦的“光滑斜坡”等等。在电学中,理想化、简单化表现为忽略体积的点电荷,忽略厚度的带电圆盘,忽略直径的带电细线等等,此外还有相对化。例如不可能有无限长的带电直线,尤其对于电流源而言,想让导线载有恒定的或时变电流,需形成回路,故首先“直”就做不到,“无限长”也做不到,物理上这是不可能的。无限大带电体是科学方法中的相对化结果:无限长带电直线源的场,指的是场点到带电线的距离远小于直线的长度且处于带电直线的中段;无限大带电圆盘是场点到圆盘的距离远小于圆盘半径且处于圆盘中心区域等等。因此无限大带电体实质上是有限的, Helmholtz 定理仍然是适用的。

3.2 无限大带电体与相对化适用范围

如上所述,无限大带电体是在一定的求解精度要求下,对有限大带电体实行相对化的结果。从式(7)可见无限长均匀带电直线的电场

$$|\mathbf{E}(\mathbf{r})| \propto \frac{1}{R^1} \quad (11)$$

电场强度的大小与源点到场点距离 R (见图1)的一次方成反比。从式(9)可见无限大均匀带电圆盘的电场

$$|\mathbf{E}(\mathbf{r})| \propto \frac{1}{R^0} \quad (12)$$

电场强度的大小与源点到场点距离 R 的零次方成反比。因此无限长均匀带电直线和无限大均匀带电圆盘等无限大带电体的电场均不满足式(5)所示的条件,若仍选取无限远处作为参考点,导致式(5)的积分发散,由此算得的无限大带电体的电势为无限大,这是将有限大带电体相对化为无限

大带电体的结果。正是因为相对化,当将原来离带电直线距离远小于均匀带电直线的长度且处于带电直线中段的两个场点 r 和 r_0 之一(如 r_0)推到无限远处,则无限长均匀带电直线便会还原为有限长带电直线,原来的场表达式(7)不再成立。所以,对于无限大带电体,场点 r 和作为电势参考点的 r_0 都有限制范围: r 和 r_0 到带电体的距离应远小于带电体的尺度并远离带电体的边缘。所以,套用有限大带电体的电势公式求无限大带电体的电势,便会出现发散积分。

此外,当运用理想化、简单化后得到的结果时,均应考察它们的适用范围。

4 结论

(1) 有限大带电体的电场与 $1/R^n$ ($n > 1$) 成比例,无限远处参考点的电势趋于零。将有限大带电体相对化为无限大带电体的电场与 $1/R^n$ ($n \leq 1$) 成比例,这种情况下无限远处参考点电势必趋于无限大。

(2) 在无限远处,无限大带电体还原为有限大带电体,无限大带电体的电场表达式在无限远处不再成立。场点和电势参考点(也是场点),都应处在带电体无限大假设成立的范围内。

(3) 有限大带电体的电势,由两场点间电场的路径积分算出,以无限远点为参考点。同样地,无限大带电体的电势,也应由两点间电场的路径积分算出。不同的是,以有限远处为参考点。

(4) 当运用理想化、简单化得到的结果时,均应从物理角度考察它们的适用范围。如果抛开物理意义,仅从数学上分析问题可能会将简单问题复杂化,导致基本概念的混乱。

从基本概念出发,从基本定理出发解决问题,不仅对于电动力学的学习,对后续量子场论的学

习也是非常重要的。掌握理想化、简单化和相对化方法及其适用范围,对“深化学生对物理学的认知”“特别是将来准备从事理论物理研究的学生”^[1],还是对从事工程技术的学生,都是至关重要的。

参 考 文 献

- [1] 高向东,王雯宇,曾定方. 均匀带电的无限长直导线的正规化处理——一个将量子场论概念与方法融入本科教学的例子[J]. 物理与工程, 2024, 34(1): 35-40.
GAO X D, WANG W Y, ZENG D F. Regularisation of the potential problem for uniformly charged infinitely long straight wires—An example of integrating quantum field theory concepts and methods into undergraduate teaching [J]. Physics and Engineering, 2024, 34(1): 35-40. (in Chinese)
- [2] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
GUO S H. Electrodynamics[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2008. (in Chinese)
- [3] 冯恩信. 电磁场与电磁波[M]. 4版. 西安: 西安交通大学出版社, 2016.
FENG E X. Electromagnetic fields and electromagnetic waves[M]. 4th ed. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2016. (in Chinese)
- [4] 同济大学数学系. 高等数学(上册)[M]. 8版. 北京: 高等教育出版社, 2022.
Department of Mathematics, Tongji University. Advanced Mathematics (Volume I)[M]. 8th ed. Beijing: Higher Education Press, 2022. (in Chinese)
- [5] 吴俊林. 基础物理实验[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
WU J L. Basic physics experiment[M]. Beijing: Science Press, 2010. (in Chinese)
- [6] 程守洵 江之永. 普通物理学(上册)[M]. 8版. 北京: 高等教育出版社, 2022.
CHENG S Z, JIANG Z Y. General physics (Volume I) [M]. 8th ed. Beijing: Higher Education Press, 2022. (in Chinese)