

量子力学满足伽利略相对性原理的变换形式探究

吕文文 王 锋

(北京理工大学物理学院, 北京 100081)

摘 要 本文介绍了相对性原理从伽利略相对性原理到狭义相对论再到广义相对论的发展过程。受此启发,进行了量子力学满足伽利略相对性原理的变换形式探究。本文从么正变换可以保持量子力学的物理规律不变出发,将量子力学中的动量平移么正变换与经典力学中的伽利略变换相对应,揭示出量子力学满足伽利略相对性原理的变换形式可以通过动量平移么正变换实现。这种探究有利于学生深入思考量子力学和经典物理的对应关系,能降低初学者对于量子物理和经典物理之间的冲突感,帮助学生搭建从经典到量子思维跃迁的桥梁。

关键词 量子力学;伽利略相对性原理;动量平移么正变换

RESEARCH ON THE TRANSFORMATION FROM OF QUAMTUM MECHANICS SATISFYING GALILEO'S PRINCIPLE OF RELATIVITY

LYU Wenwen WANG Feng

(College of Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

Abstract This paper introduces the development of the principle of relativity from Galileo's principle of relativity to special relativity and then to general relativity. Inspired by this, we explored the transformation form of quantum mechanics to meet Galileo's principle of relativity. Firstly, from the point that unitary transformation can keep the physical laws of quantum mechanics unchanged, we correspond the momentum translation unitary transformation in quantum mechanics to the Galileo transformation in classical mechanics, and reveal that the transformation form of quantum mechanics that meets the Galileo principle of relativity can be realized through the momentum translation unitary transformation. This inquiry is conducive to students' in-depth thinking about the corresponding relationship between quantum mechanics and classical physics, can help beginners reduce the conflict between quantum physics and classical physics, and help students build a bridge from classical to quantum thinking.

Key words quantum mechanics; Galileo's principle of relativity; momentum translation unitary transformation

伽利略相对性原理是物理学的基本原理^[1], 指力学系统在惯性参考系中保持规律不变, 经典力学方程在惯性系间的变换通过伽利略变换实现, 可表示为

$$\begin{aligned} T &= t, \quad X = x - \mu t, \quad Y = y, \quad Z = z \\ t &= T, \quad x = X + \mu T, \quad y = Y, \quad z = Z \end{aligned} \quad (1)$$

但是, 麦克斯韦方程组在伽利略变换下不协变, 与伽利略相对性原理相悖。为了解决经典电动力学

收稿日期: 2024-09-23

基金项目: 北京市自然科学基金(1242026)。

通信作者: 王锋, wangfeng01@tsinghua.org.cn。

引文格式: 吕文文, 王锋. 量子力学满足伽利略相对性原理的变换形式探究[J]. 物理与工程, 2025, 35(3): 20-22, 30.

Cite this article: LYU W W, WANG F. Research on the transformation from of quantum mechanics satisfying Galileo's principle of relativity[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(3): 20-22, 30. (in Chinese)

同牛顿力学之间的矛盾,荷兰物理学家 H. 洛伦兹提出了洛伦兹变换。在经典力学规律中,洛伦兹变换在低速情况下与伽利略变换效果等价,变换形式不唯一,洛伦兹变换被认为是比伽利略变换更普适的变换形式。受伽利略相对性原理的启发,爱因斯坦提出了狭义相对性原理:即一切物理规律的方程式在任何惯性参考系中形式不变。使用全局的洛伦兹变换可以推出狭义相对论,适用于平直时空的惯性参考系。通过对某些满足狭义相对性原理的物理规律是否还存在更普适(区别于洛伦兹变换)的变换形式这一问题的思考,爱因斯坦提出了广义相对论^[2]:即物理规律在包括非惯性系在内的一切参考系中形式一样。在广义相对性原理中,全域的洛伦兹变换被推广为局域的洛伦兹变换,以适用于所有参考系。

20 世纪初,物理学家发现在描述某些微观现象时经典物理规律不再适用,为了解决这些难题,一些物理学家创建了量子力学^[3-5]。目前,量子力学教学为了让初学者更容易理解接受,有关内容往往会与经典力学进行类比,如量子力学中的对易括号和经典力学中的泊松括号类比、量子力学中的海森堡运动方程和经典力学中的正则方程类比,这种教学方式具有启发性。因此,本文旨在探究非相对论量子力学满足经典力学伽利略相对性原理的变换形式,为量子力学教学中与经典力学的类比添加新的内容和思路。

1 推导证明

量子力学物理规律的数学本质是希尔伯特空间中的线性复矢量代数^[6],即使用线性算符和态矢量来描述的线性代数关系。已知同时对算符和态矢量进行线性么正变换可以保持量子力学的物理规律不变。

线性么正算符 $\hat{U}$ 满足如下定义

$$\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}, \quad \hat{U}^\dagger \hat{U} = 1 \quad (2)$$

无穷小线性么正变换算符可以写成如下形式

$$\hat{U} = 1 + i \frac{\epsilon}{\hbar} \hat{F}, \quad \epsilon \rightarrow 0^+ \quad (3)$$

此时

$$\begin{aligned} \hat{U} \hat{U}^\dagger &= \left(1 + i \frac{\epsilon}{\hbar} \hat{F}\right) \left(1 - i \frac{\epsilon}{\hbar} \hat{F}^\dagger\right) \\ &= 1 + i \frac{\epsilon}{\hbar} (\hat{F} - \hat{F}^\dagger) + \frac{\epsilon^2}{\hbar^2} \hat{F} \hat{F}^\dagger = 1 \quad (4) \end{aligned}$$

其中,厄米算符 $\hat{F}$ 是么正变换算符 $\hat{U}$ 的生成元算符。无穷小么正变换算符还可以写成如下所示的指数表达形式

$$\hat{U}(\epsilon) = e^{i \frac{\epsilon}{\hbar} \hat{F}}, \quad \epsilon \rightarrow 0^+ \quad (5)$$

无穷多个无穷小么正变换算符积累可以得到有限量的么正变换,对于有限大小的变换 Δ ,令 $\epsilon = \frac{\Delta}{n}$, $n \rightarrow \infty$ 有

$$\hat{U}(\Delta) = e^{i \frac{\Delta}{\hbar} \hat{F}}, \quad \epsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta}{n} \quad (6)$$

同时对算符和态矢量进行么正变换可以保持算符和态矢量之间的线性代数关系不变。举例如下:

(1) 对关系式

$$|b\rangle = \hat{C} |a\rangle \quad (7)$$

进行如下形式的么正变换

$$\begin{cases} |b'\rangle = \hat{U} |b\rangle \\ |a'\rangle = \hat{U} |a\rangle \\ \hat{C}' = \hat{U} \hat{C} \hat{U}^{-1} \end{cases} \quad (8)$$

即

$$\begin{cases} |b\rangle = \hat{U}^{-1} |b'\rangle \\ |a\rangle = \hat{U}^{-1} |a'\rangle \\ \hat{C} = \hat{U}^{-1} \hat{C}' \hat{U} \end{cases} \quad (9)$$

把式(9)代入式(7)可得 $|b'\rangle = \hat{C}' |a'\rangle$ 。

(2) 对关系式

$$\hat{C}(|a\rangle + |b\rangle) = \hat{C} |a\rangle + \hat{C} |b\rangle \quad (10)$$

也进行如式(8)所示的么正变换,即把式(9)代入式(10)可得

$$\hat{C}'(|a'\rangle + |b'\rangle) = \hat{C}' |a'\rangle + \hat{C}' |b'\rangle \quad (11)$$

(3) 对态矢量长度 $\langle a | a \rangle$ 进行如下形式的么正变换

$$|a'\rangle = \hat{U} |a\rangle \quad (12)$$

即把 $|a\rangle = \hat{U}^{-1} |a'\rangle$ 代入可得

$$\langle a | a \rangle = \langle a' | a' \rangle \quad (13)$$

(4) 对厄米算符 $\hat{F}^\dagger = \hat{F}$ 进行如下形式的么正变换

$$\hat{F}' = \hat{U} \hat{F} \hat{U}^{-1} \quad (14)$$

即把 $\hat{F} = \hat{U}^{-1} \hat{F}' \hat{U}$ 代入 $\hat{F}^\dagger = \hat{F}$, 可得 $\hat{F}'^\dagger = \hat{F}'$ 。综上所述,么正变换可以保持算符和态矢量之间的线性代数关系、态矢量长度以及算符的厄米性不变,即保持量子力学的物理规律不变。

接下来将对非相对论量子力学的物理规律在不同惯性参考系中满足伽利略相对性原理的变换形式进行分析。伽利略变换描述的是时空坐标系

之间的转换关系,将式(1)求导并在方程两边分别乘以质量 m 可以得到动量间的变换关系

$$\begin{aligned} mV_x &= mv_x - m\mu \\ mv_x &= mV_x + m\mu \end{aligned} \quad (15)$$

即

$$\begin{aligned} p'_x &= p_x - \Delta p_x \\ p_x &= p'_x + \Delta p_x \end{aligned} \quad (16)$$

而在量子力学中,从对易关系 $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$ 出发

$$\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = i\hbar \quad (17)$$

在式(17)两边分别乘以一个无穷小量 ϵ , ($\epsilon \rightarrow 0^+$) 可以表示为:

$$-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{x}\hat{p}_x + \frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{p}_x\hat{x} = \epsilon \quad (18)$$

通过在式(18)左侧引入一个高阶小参量 $\frac{\epsilon^2}{\hbar^2}\hat{x}\hat{p}_x\hat{x}$ 可得

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon^2}{\hbar^2}\hat{x}\hat{p}_x\hat{x} - \frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{x}\hat{p}_x + \frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{p}_x\hat{x} + \hat{p}_x &= \epsilon + \\ \hat{p}_x\left(1 + \frac{i}{\hbar}\epsilon(-\hat{x})\right)\hat{p}_x\left(1 - \frac{i}{\hbar}\epsilon(-\hat{x})\right) &= \hat{p}_x + \epsilon \end{aligned} \quad (19)$$

令 $\hat{Q} = 1 - \frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{x}$, $\epsilon \rightarrow 0^+$, 则 $\hat{Q}^{-1} = 1 + \frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{x}$, $\epsilon \rightarrow 0^+$

$$\hat{Q}\hat{p}_x\hat{Q}^{-1} = \hat{p}_x + \epsilon \quad (20)$$

由此可知 $\hat{Q}$ 是动量平移么正变换算符,与伽利略变换相对应, $-\hat{x}$, $\hat{x}$ 分别表示沿着动量轴正、负方向进行动量平移操作的生成元算符。动量平移么正变换算符还可以写成如下所示的指数表达形式

$$\hat{Q}(\epsilon) = e^{\frac{i\epsilon\hat{x}}{\hbar}}, \quad \epsilon \rightarrow 0^+ \quad (21)$$

则 $\hat{Q}(\epsilon)^{-1} = e^{-\frac{i\epsilon\hat{x}}{\hbar}}$, 对态矢量进行动量平移么正变换相当于对其增加了一个额外的共同相位(global phase), 这种操作在实验上测量不出来, 不会影响粒子的相互作用结果。对于有限大小的变换 Δ ,

令 $\epsilon = \frac{\Delta}{n}$, $n \rightarrow \infty$ 有

$$\hat{Q}(\Delta) = e^{\frac{i\Delta\hat{x}}{\hbar}}, \quad \epsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta}{n} \quad (22)$$

此时 $\hat{Q}(\Delta)^{-1} = e^{-\frac{i\Delta\hat{x}}{\hbar}}$ 。

量子力学满足伽利略相对性原理的变换形式可以通过动量平移么正变换实现, 举例如下:

(1) 对于自由粒子, 哈密顿算符 $\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m}$ 。对动量

算符 $\hat{p}_x$ 和哈密顿算符 $\hat{H}$ 进行如下形式的动量平移么正变换

$$\begin{cases} \hat{p}'_x = \hat{Q}\hat{p}_x\hat{Q}^{-1} = \hat{p}_x + \epsilon \\ \hat{H}' = \hat{Q}\hat{H}\hat{Q}^{-1} \end{cases} \quad (23)$$

即

$$\begin{cases} \hat{p}_x = \hat{Q}^{-1}\hat{p}'_x\hat{Q} \\ \hat{H} = \hat{Q}^{-1}\hat{H}'\hat{Q} \end{cases} \quad (24)$$

把式(24)代入 $\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m}$ 可得

$$\hat{H}' = \frac{(\hat{p}'_x)^2}{2m} = \frac{(\hat{p}_x + \epsilon)^2}{2m} \quad (25)$$

说明动量平移么正变换不会改变系统哈密顿量的数学形式, 同时式(25)也直观反映出伽利略变换不改变系统哈密顿量的数学形式, 两种变换的效果相同。

(2) 已知海森堡绘景下物理量随时间的演化满足海森堡运动方程, 动量算符 $\hat{p}_x$ 满足如下方程

$$\frac{d\hat{p}_x}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}_x, \hat{H}] \quad (26)$$

对方程(26)也进行如式(23)所示的动量平移么正变换, 即把式(24)代入方程(26)可得

$$\frac{d\hat{p}'_x}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}'_x, \hat{H}'] \quad (27)$$

说明动量平移么正变换不改变海森堡运动方程的数学形式。哈密顿量还可以表示为

$$\hat{H}(\hat{p}_x, \hat{x}) = \hat{T}(\hat{p}_x) + \hat{U}(\hat{x}) \quad (28)$$

对式(26)直接进行伽利略变换 $\hat{p}'_x = \hat{p}_x + \epsilon$, 即将 $\hat{p}_x = \hat{p}'_x - \epsilon$ 代入式(26):

$$\frac{d(\hat{p}'_x - \epsilon)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}'_x - \epsilon, \hat{H}(\hat{p}'_x - \epsilon, \hat{x})] \quad (29)$$

同样可得式(27), 说明动量平移么正变换与伽利略变换效果相同。

综上所述, 非相对论量子力学的物理规律在不同惯性参考系中满足伽利略相对性原理的变换可通过动量平移么正变换实现。

2 结语

本文以伽利略相对性原理为切入点, 结合么正变换不改变量子力学物理规律, 阐明了量子力

(下转第 30 页)

- ence on Game Jams, Hackathons and Game Creation Events (ICGJ 23). Association for Computing Machinery, New York, USA, 2023, 18-27.
- [4] FALETIC S, BITZENBAUER P, BONDANI M, et al. Contributions from Pilot Projects in Quantum Technology Education as Support Action to Quantum Flagship[DB/OL]. arXiv preprint, 2023, arXiv: 2303.07055
- [5] 陈巍, 银振强, 韩正甫, 等. 网络空间安全本科量子信息教学实践[J]. 网络与信息安全学报, 2019, 5(3): 81-88.
CHEN W, YIN Z Q, HAN Z F, et al. Quantum information course for the undergraduate students of cyber security[J]. Chinese Journal of Network and Information Security, 2019, 5(3): 81-88. (in Chinese)
- [6] 尚涛, 刘建伟, 张国锋, 等. 量子密码课程教学实践[J]. 计算机教育, 2023(3): 9-13.
SHANG T, LIU J W, ZHANG G F, et al. Quantum cryptography course teaching practice[J]. Computer Education, 2023(3): 9-13. (in Chinese)
- [7] 赵丽娟, 尹丽星, 徐志钊. 量子通信中量子密钥分发教学仿真实验设计[J]. 实验技术与管理, 2022, 39(8): 141-145.
ZHAO L J, YIN L X, XU Z N. Design of quantum key distribution teaching simulation experiment in quantum communication[J]. Experimental Technology and Manage-
- ment, 2022, 39(8): 141-145. (in Chinese)
- [8] MIGDAL P, JANKIEWICZ K, GRABARZ P, et al. Visualizing quantum mechanics in an interactive simulation—Virtual Lab by Quantum Flytrap[J]. Optical Engineering, 2022, 61(8): 081808.
- [9] LA COUR B R, MAYNARD M, SHROFF P, et al. The Virtual Quantum Optics Laboratory[C]. 2022 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE), Broomfield, CO, USA, 2022, 677-687.
- [10] PARAKH A, SUBRAMANIAM M, OSTLER E. QuaSim: A virtual quantum cryptography educator[C]. 2017 IEEE International Conference on Electro Information Technology (EIT), Lincoln, New York, USA, 2017: 600-605.
- [11] LOPEZ-INCERA A, DUR W. Entangle me! A game to demonstrate the principles of quantum mechanics[J]. American Journal of Physics, 2019, 87(2): 95-101.
- [12] LOPEZ-INCERA A, DUR W, HARTMANN A. Encrypt me! A game-based approach to Bell inequalities and quantum cryptography[J]. European Journal of Physics, 2020, 41(6): 065702.

(上接第 22 页)

学中的动量平移么正变换与经典力学中的伽利略变换相对应, 揭示出动量平移么正变换就是量子力学满足伽利略相对性原理的变换形式。这种探究有利于学生深入思考量子力学和经典物理的对应关系, 帮助学生搭建从经典到量子思维跃迁的桥梁, 锻炼了学生的逻辑思维能力, 使教学过程更富有启发性。

参 考 文 献

- [1] 费恩曼, 莱顿, 桑兹. 费恩曼物理学讲义第 1 卷[M]. 新千年版. 郑永令, 华宏鸣, 吴子仪, 等, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2013.
FEYNMAN R P, LEIGHTON R B, SANDS M. The Feynman lectures on physics Vol. 1[M]. New Millennium Edition. Translated by ZHENG Y L, HUA H M, WU Z Y, et al. Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publishers, 2013. (translated into Chinese)
- [2] 爱因斯坦. 狭义与广义相对论浅说[M]. 杨润殷, 译. 北京: 北
- 京大学出版社, 2006.
EINSTEIN A. A brief overview of special and general relativity[M]. Translated by YANG R Y. Beijing: Peking University Press, 2006. (translated into Chinese)
- [3] 曾谨言. 量子力学[M]. 5 版. 北京: 科学出版社, 2013.
ZENG J Y. Quantum mechanics[M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese)
- [4] 钱伯初. 量子力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
QIAN B C. Quantum mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese)
- [5] 周世勋, 陈灏, 肖江. 量子力学教程[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2022.
ZHOU S X, CHEN H, XIAO J. Introduction to quantum mechanics[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2022. (in Chinese)
- [6] 李梧龄. 组合希尔伯特空间和代数——量子力学的数学基础[J]. 自然杂志, 1987, (6): 9-14.
LI W L. Combinatorial Hilbert space and Algebra—The mathematical foundations of quantum mechanics[J]. Nature Magazine, 1987, (6): 9-14. (in Chinese)