

一维谐振子坐标表象与动量表象的等价性

纪怀昱 张子骏 郑 华 孙 辉

(陕西师范大学物理学与信息技术学院, 陕西 西安 710119)

摘 要 一维谐振子是量子力学中少数可以精确解析求解的模型之一, 可以用于检验量子力学的理论与方法, 具有丰富的内涵。利用傅里叶变换与厄米多项式的生成函数, 实现了一维谐振子坐标表象中本征波函数到动量表象中本征波函数的变换, 验证了两种表象中对一维谐振子描述的等价性与联系。利用代数解法分别得到一维谐振子在坐标表象与动量表象中本征能量与本征波函数, 进一步讨论了两表象的等价性。强调了物理学中“降维打击”思想, 加深学生对量子力学的理解, 激发学生的学习兴趣。

关键词 一维谐振子; 厄米多项式; 生成函数; 傅里叶变换

STUDY ON THE EQUIVALENCE BETWEEN COORDINATE REPRESENTATION AND MOMENTUM REPRESENTATION FOR ONE-DIMENSIONAL HARMONIC OSCILLATOR

JI Huaiyu ZHANG Zijun ZHENG Hua SUN Hui

(School of Physics & Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an, Shaanxi 710119)

Abstract The one-dimensional harmonic oscillator is one of the few models in quantum mechanics that can be solved analytically, and it is used to exam the theories and methods of quantum mechanics, possessing rich connotations. Using the Fourier transform and the generating function of Hermite polynomials, the transformation from the eigenfunction in the coordinate representation to that in the momentum representation for a one-dimensional harmonic oscillator has been achieved. The equivalence and connection between the two representations for describing a one-dimensional harmonic oscillator are verified. The eigenenergies and eigenfunctions of the one-dimensional harmonic oscillator in the coordinate representation and momentum representation are also obtained by using the algebraic solution method, respectively. The equivalence of the two representations is further discussed. The idea of “solving physical problems in higher dimensional space” is emphasized, which deepens students’ understanding of quantum mechanics and stimulates their interest in learning.

Key words one-dimensional harmonic oscillator; Hermitian polynomial; generating function; Fourier transform

收稿日期: 2024-04-09

基金项目: 国家自然科学基金(11905120)。

通信作者: 郑华, zhengh@snnu.edu.cn。

引文格式: 纪怀昱, 张子骏, 郑华, 等. 一维谐振子坐标表象与动量表象的等价性[J]. 物理与工程, 2025, 35(3): 14-19.

Cite this article: JI H Y, ZHANG Z J, ZHENG H, et al. Study on the equivalence between coordinate representation and momentum representation for one-dimensional harmonic oscillator[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(3): 14-19. (in Chinese)

在量子力学中,一维谐振子是为数不多可精确解析求解的问题之一,并且其数学处理相对简单。通过研究一维谐振子,可以深入理解量子力学的基本原理和数学形式。国内外量子力学教材都把其纳入了本科生的教学大纲,是量子力学教学的重难点之一。

因本科量子力学教材篇幅与课时的原因,在讲授一维谐振子问题时,通常只介绍在坐标表象中解析求解其薛定谔方程^[1-3]。众所周知,量子力学中,在不同的表象中可以对同一问题进行描述,不同表象之间彼此联系且等价,即表象变换理论。坐标表象与动量表象是量子力学中比较常见的两种表象,二者之间可由傅里叶变换联系。在量子力学教材中,对一维谐振子本征波函数从坐标表象到动量表象的变换仅限于基态波函数^[1-3]。可能原因是一维谐振子本征波函数的一般表达式中包含特殊函数厄米多项式,直接利用傅里叶变换完成从坐标表象到动量表象的变换在数学上有一定的困难。然而,实际上这个变换过程本科生是完全可以完成的,并且能加深学生对量子力学基本原理与数学形式的理解。

目前,文献中对一维谐振子问题的讨论主要有:对能量本征值的求解^[4-6],算符法求解能量本征值与坐标表象中的本征波函数^[7-9],以及在不同表象中求解能量本征值与本征波函数^[10,11]。文献[11,12]计算了一维谐振子坐标表象中本征波函数与动量表象中本征波函数的傅里叶变换,但采用的是递推的方法,需要逐个计算,使用起来不是很方便。

本文先简要地给出一维谐振子分别在坐标表象与动量表象中的本征能量与本征波函数,然后利用厄米多项式的生成函数与傅里叶变换完成坐标表象中的本征波函数到动量表象中的本征波函数的变换,最后简单讨论代数解法并分别给出坐标表象与动量表象中的本征能量与本征波函数。再次强化文献[13]中提出的物理学中“降维打击”思想,有助于学生深入理解一维谐振子的求解与表象变换理论,培养学生的发散思维,激发学生的学习兴趣。

1 在坐标表象中求解一维谐振子

一维谐振子的哈密顿量是^[1-3]

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 \quad (1)$$

在坐标表象中,其定态薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x) \quad (2)$$

将式(2)无量纲化,方程两边同时除以 $\frac{\hbar\omega}{2}$ 可得

$$-\frac{\hbar}{m\omega} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{m\omega}{\hbar} x^2 \psi(x) = \frac{2E}{\hbar\omega} \psi(x) \quad (3)$$

引入无量纲参数

$$\xi = \alpha x, \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega} \quad (4)$$

其中 $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$,则式(3)可写为

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\psi(\xi) = 0 \quad (5)$$

利用幂级数解法与边界条件^[3],可以得到一维谐振子的量子化本征能级

$$E = E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad (6)$$

在量子力学中,规定厄米多项式^[14-16]最高幂次项的系数为 2^n 。一维谐振子归一化的本征波函数为

$$\psi_n(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi} 2^n n!} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} H_n(\alpha x) \quad (7)$$

其中, $H_n(\alpha x)$ 为厄米多项式。需要指出,对式(5)给出的一维谐振子本征波函数进行归一化需要用到厄米多项式的生成函数且计算过程不短。

2 在动量表象中求解一维谐振子

在动量表象中,一维谐振子定态薛定谔方程为

$$\frac{p^2}{2m} \phi(p) - \frac{1}{2}m\omega^2 \hbar^2 \frac{d^2\phi(p)}{dp^2} = E\phi(p) \quad (8)$$

将式(8)无量纲化,方程两边同时除以 $\frac{\hbar\omega}{2}$ 可得

$$\frac{p^2}{m\hbar\omega} \phi(p) - m\hbar\omega \frac{d^2\phi(p)}{dp^2} = \frac{2E}{\hbar\omega} \phi(p) \quad (9)$$

引入无量纲参数

$$\eta = \beta p, \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega} \quad (10)$$

其中, $\beta = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}$,则式(9)可写为

$$\frac{d^2\phi(\eta)}{d\eta^2} + (\lambda - \eta^2)\phi(\eta) = 0 \quad (11)$$

式(11)与式(5)形式一样,后续解法与在坐标表象中完全相同。因此,在动量表象中,一维谐振子的能量本征值为

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \quad (12)$$

其在动量表象中归一化的本征波函数为

$$\phi_n(p) = \frac{\beta}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 p^2} H_n(\beta p) \quad (13)$$

其中, $H_n(\beta p)$ 为厄米多项式。

3 两种表象的等价性

一维谐振子在坐标表象中的本征波函数 $\psi(x)$ 与动量表象中的本征波函数 $\phi(p)$ 之间由傅里叶变换联系^[1]

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(p) e^{\frac{i}{\hbar} p x} dp \quad (14)$$

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} p x} dx \quad (15)$$

一维谐振子在坐标表象与动量表象中的本征波函数在二节已经分别由式(7)与式(13)给出,可以利用式(14)或式(15)来验证这两种表象的等价性。我们选择对式(7)进行傅里叶变换,从而得到动量表象中的本征波函数。然后将得到的本征波函数与式(13)进行比较。在坐标表象中,本征波函数式(7)是随 n 值变化的。显然,如果对于每一个 n 值都利用傅里叶变换得到与之对应的动量表象中的本征波函数,这样的方法与文献[12]中的递推方法一样,存在使用不方便的问题。采用“降维打击”的思想^[13],即在计算厄米多项式性质的通式过程中,利用厄米多项式的生成函数与厄米多项式的关系辅助计算,我们给出坐标表象中本征波函数变换到动量表象中本征波函数的通式证明。

由式(7)、式(15)可得

$$\begin{aligned} \phi_n(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} H_n(\alpha x) e^{-\frac{i}{\hbar} p x} dx \\ &= \frac{N_n}{\alpha \sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2 - i\beta p \xi} H_n(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $N_n = \frac{\alpha}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}}$ 。厄米多项式的生成函

数^[1]是

$$F(z, s) = e^{-s^2 + 2sz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(z) \quad (17)$$

其中, s, z 是自变量。由式(16)、式(17)可得

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \frac{\alpha \sqrt{2\pi\hbar}}{N_n} \phi_n(p) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2 - i\beta p \xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(\xi) d\xi \\ &= e^{-(is)^2 + 2(is)(-\beta p) - \frac{1}{2}\beta^2 p^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\xi + i\beta p - 2s)^2} d\xi \end{aligned} \quad (18)$$

式(18)右边是类高斯型积分^[17]且积分结果为 $\sqrt{2\pi}$, 因此可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \frac{\alpha \sqrt{\hbar}}{N_n} \phi_n(p) &= e^{-(is)^2 + 2(is)(-\beta p) - \frac{1}{2}\beta^2 p^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} (i)^n H_n(-\beta p) e^{-\frac{1}{2}\beta^2 p^2} \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)对任意的 s 都成立并利用厄米多项式的奇偶性^[1]可得

$$\phi_n(p) = (-i)^n \frac{\beta}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 p^2} H_n(\beta p) \quad (20)$$

$(-i)^n$ 可视为波函数的相位因子, 式(13)与式(20)是同一波函数。这就验证了在两种表象中求解一维谐振子的等价性。

其实从一维谐振子的哈密顿量式(1)就可以看出在坐标表象与动量表象中求解的等价性。原因是算符 $\hat{p}$ 与 $\hat{x}$ 都是 2 次方, 它们处于同样的地位。这也暗示着一维谐振子在坐标表象与动量表象中波函数形式的一致性, 只是变量前的系数不同而已。从两种表象中的求解过程可以证实这一点。

4 代数解法

一维谐振子的哈密顿量式(1)可改写为

$$\hat{H} = \hbar \omega \left(\frac{1}{2} \frac{\hat{p}^2}{m \hbar \omega} + \frac{1}{2} \frac{m \omega}{\hbar} \hat{x}^2 \right) \quad (21)$$

引入产生湮灭算符

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i\hat{P} + \hat{X}) \quad (22)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (-i\hat{P} + \hat{X}) \quad (23)$$

其中算符 $\hat{P} = \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}\hat{p}$, $\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x}$, 是两个无量纲算符。由对易关系 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ 可得

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i \quad (24)$$

式(21)可改写为

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \quad (25)$$

定义新的算符(粒子数算符)

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (26)$$

由式(22)、式(23)、式(24)、式(26)可得

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (27)$$

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \quad (28)$$

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \quad (29)$$

假设算符 $\hat{N}$ 有本征值为 ν 的本征矢 $|\nu\rangle$

$$\hat{N}|\nu\rangle = \nu|\nu\rangle \quad (30)$$

利用式(28)、式(29)、式(30)可得

$$\hat{N}\hat{a}|\nu\rangle = \hat{a}\hat{N}|\nu\rangle - \hat{a}|\nu\rangle = (\nu-1)\hat{a}|\nu\rangle \quad (31)$$

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger|\nu\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{N}|\nu\rangle + \hat{a}^\dagger|\nu\rangle = (\nu+1)\hat{a}^\dagger|\nu\rangle \quad (32)$$

所以 $\hat{a}|\nu\rangle$ 是算符 $\hat{N}$ 的本征值为 $\nu-1$ 的本征矢, $\hat{a}^\dagger|\nu\rangle$ 是算符 $\hat{N}$ 的本征值为 $\nu+1$ 的本征矢。本征矢 $\hat{a}|\nu\rangle$ 的模方为

$$|\hat{a}|\nu\rangle|^2 = \langle\nu|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\nu\rangle = \langle\nu|\hat{N}|\nu\rangle = \nu\langle\nu|\nu\rangle \quad (33)$$

因为 $|\hat{a}|\nu\rangle|^2 \geq 0$, $\langle\nu|\nu\rangle > 0$ 恒成立, 所以当 $\nu=0$ 时, 有

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad (34)$$

由式(32)不难证明, 算符 $\hat{N}$ 的本征值只能是非负整数。将 $|\nu\rangle$ 记为 $|n\rangle$, 则算符 $\hat{N}$ 的本征方程可写为

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \quad (35)$$

n 是非负整数。规定本征矢的归一化

$$\langle n|n\rangle = 1 \quad (36)$$

不难证明

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (37)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (38)$$

由式(25)、式(26)、式(35)可以得到一维谐振子的能量本征方程为

$$\begin{aligned} \hat{H}|n\rangle &= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle \\ &= \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle \end{aligned} \quad (39)$$

因此一维谐振子的能量本征值为

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (40)$$

4.1 投影到坐标表象

在坐标表象中, 由式(22)、式(23)可得

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha x + \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right) \quad (41)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha x - \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right) \quad (42)$$

将式(34)在坐标表象中投影

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)\psi_0(\xi) = 0 \quad (43)$$

求解该微分方程, 并利用高斯型积分^[17]以及波函数的归一化可得

$$\psi_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \quad (44)$$

由式(38)可得

$$\hat{a}^\dagger\psi_{n-1}(\xi) = \sqrt{n}\psi_n(\xi) \quad (45)$$

由式(42)、式(45)可得

$$\begin{aligned} \psi_n(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)\psi_{n-1}(\xi) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2n}}e^{\frac{1}{2}\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\psi_{n-1}(\xi)\right) \end{aligned} \quad (46)$$

由式(44)、式(46)及厄米多项式的微分形式^[1]可得

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}e^{-\frac{1}{2}\xi^2}H_n(\xi) \quad (47)$$

因此, 一维谐振子在坐标表象中的归一化本征波函数为

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}}e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}H_n(\alpha x) \quad (48)$$

式(48)与在坐标表象中解析求解薛定谔方程的结果式(7)是一样的。

4.2 投影到动量表象

在动量表象中, 由式(22)、式(23)可得

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\beta p + i\frac{1}{\beta}\frac{d}{dp}\right) = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\eta + \frac{d}{d\eta}\right) \quad (49)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i\beta p + i\frac{1}{\beta}\frac{d}{dp}\right) = \frac{-i}{\sqrt{2}}\left(\eta - \frac{d}{d\eta}\right) \quad (50)$$

将式(34)在动量表象中投影

$$\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\eta + \frac{d}{d\eta}\right)\phi_0(\eta) = 0 \quad (51)$$

求解微分方程,并利用高斯型积分^[17]以及波函数的归一化可得

$$\phi_0(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2}\eta^2} \quad (52)$$

由式(38)可得

$$\hat{a}^\dagger \phi_{n-1}(\eta) = \sqrt{n} \phi_n(\eta) \quad (53)$$

由式(50)、式(53)可得

$$\begin{aligned} \phi_n(\eta) &= -i \frac{1}{\sqrt{2n}} \left(\eta - \frac{d}{d\eta} \right) \phi_{n-1}(\eta) \\ &= -i \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{\frac{1}{2}\eta^2} \frac{d}{d\eta} (e^{-\frac{1}{2}\eta^2} \phi_{n-1}(\eta)) \end{aligned} \quad (54)$$

由式(52)、式(54)及厄米多项式的微分形式^[1]可得

$$\phi_n(\eta) = (-i)^n \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\eta^2} H_n(\eta) \quad (55)$$

$(-i)^n$ 可视为波函数的相位因子。因此,一维谐振子在动量表象中的归一化本征波函数为

$$\phi_n(p) = \sqrt{\frac{\beta}{\sqrt{\pi} 2^n n!}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 p^2} H_n(\beta p) \quad (56)$$

式(56)与在动量表象中解析求解薛定谔方程的结果式(13)是一样的。

由此可见,代数法求解一维谐振子能量本征值时不依赖具体的表象,并且数学运算比较简单,物理意义也非常明显。在坐标表象或动量表象中求解本征波函数时,所得本征波函数是自动归一化的。从两种表象中的产生湮灭算符的形式相同,也可以看出两种表象的等价性。

5 结语

综上所述,借助物理学中的“降维打击”思想,本文利用厄米多项式的生成函数与傅里叶变换,将一维谐振子在坐标表象中的本征波函数变换到了动量表象中的本征波函数,得到了与直接在动量表象中解析求解定态薛定谔方程一致的结果。本文验证了不同表象对量子力学问题描述的等价性。这是量子力学中表象变换理论的一个非常好的例子。同时我们还讨论了利用代数解法得到一维谐振子的本征能量与本征波函数及表象的等价性。这有利于加深学生对一维谐振子与表象变换理论的认识与理解,培养学生的发散思维,激发他们对量子力学课程的学习兴趣。

参 考 文 献

- [1] 周世勋,陈灏,肖江. 量子力学教程[M]. 3版. 北京:高等教育出版社,2022.
ZHOU S X, CHEN H, XIAO J. Introduction to quantum mechanics[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2022. (in Chinese)
- [2] 钱伯初. 量子力学[M]. 北京:高等教育出版社,2006.
QIAN B C. Quantum mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese)
- [3] 曾谨言. 量子力学[M]. 5版. 北京:科学出版社,2013.
ZENG J Y. Quantum mechanics[M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese)
- [4] 蒋学华. 求解谐振子能量本征值的几种方法[J]. 南阳师范学院学报(自然科学版), 2002, 1(6):33-35.
JIANG X H. Several solutions to solving harmonic oscillator's energy eigenvalue [J]. Journal of Nanyang Teachers College (Natural Science Edition), 2002, 1(6): 33-35. (in Chinese)
- [5] 王可,陶才德. 一维线性谐振子量子束缚态能级的几种计算方法[J]. 绵阳师范学院学报, 2005, 24(5):57-61.
WANG K, TAO C D. A discussion of the energy calculation means of linear harmonic oscillator[J]. Journal of Mianyang Normal University, 2005, 24(5): 57-61. (in Chinese)
- [6] 韩东峰,康莉,孙孟乐. 一维谐振子能量本征值两种解法探讨[J]. 洛阳工业高等专科学校学报, 2005, 15(2):21-22, 51.
HAN D F, KANG L, SUN M L. Two kinds of methods and discussion about eigenvalues of energy of one-dimension harmonic oscillator[J]. Journal of Luoyang technology college, 2005, 15(2): 21-22, 51. (in Chinese)
- [7] 姜荣. 线性谐振子的算符理论[J]. 科技信息(科学教研), 2008, 25(9):257-259.
JIANG R. The operator theory of linear resonance[J]. Science & Technology Information, 2008, 25(9): 257-259. (in Chinese)
- [8] 刘海宽,张海丰,马佳. 升降算符在一维谐振子能级讨论中的应用[J]. 商丘师范学院学报, 2020, 36(12):22-26.
LIU H K, ZHANG H F, MA J. Application of the raising and lowering operators in the discussion of one-dimensional harmonic oscillator energy levels[J]. Journal of Shangqiu Normal University, 2020, 36(12): 22-26. (in Chinese)
- [9] 王长荣. 一维谐振子能级和波函数的代数解法[J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 2001, 21(3):22-24.
WANG C R. Algebraical solution to the energy level and wave function of one-dimensional harmonic oscillator[J]. Journal of Yunnan Normal University, 2001, 21(3): 22-24. (in Chinese)
- [10] 刘晓丽,赵岩,戴宝印. 一维谐振子能量本征值在各种表象中的求解[J]. 鞍山师范学院学报, 2000, 2(3):51-54.
LIU X L, ZHAO Y, DAI B Y. The solutions of one-di-

- mensional harmonic oscillator energy eigenvalues in different representation[J]. Journal of Anshan Teachers College, 2000, 2(3): 51-54. (in Chinese)
- [11] 熊志华, 周珏. 三种表象中的一维谐振子性质研究[J]. 江西科技师范学院学报, 2003, 23(4): 20-22.
- XIONG Z H, ZHOU J. A study of the nature of a harmonic oscillator with different representations[J]. Journal of Jiangxi Science & Technology Teachers' College, 2003, 23(4): 20-22. (in Chinese)
- [12] 罗凌霄. 一维谐振子的动量几率幅和等式型不确定关系[J]. 许昌学院学报, 2004, 23(5): 21-24.
- LUO L X. The momentum probability amplitude and the equality form uncertain relation of one-dimensional harmonic oscillator[J]. Journal of Xuchang University, 2004, 23(5): 21-24. (in Chinese)
- [13] 郑华, 王新刚, 朱励霖. 物理学中的“降维打击”[J]. 物理与工程, 2023, 33(3): 46-48, 63.
- ZHENG H, WANG X G, ZHU L L. Solving physical problems in higher dimensional space[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(3): 46-48, 63. (in Chinese)
- [14] 倪致祥. 厄米本征值问题的探究[J]. 大学物理, 2008, 27(2): 39-41.
- NI Z X. Exploring for the Hermite eigenvalue problem[J]. College Physics, 2008, 27(2): 39-41. (in Chinese)
- [15] 胡先权, 王帮美. 也谈厄米多项式的递推关系[J]. 大学物理, 2009, 28(6): 22-23.
- HU X Q, WANG B M. Discussing on the recurrence relation of the Hermite polynomial also[J]. College Physics, 2009, 28(6): 22-23. (in Chinese)
- [16] 吴崇试. 厄米多项式的定义及其他[J]. 大学物理, 2010, 29(3): 14-15.
- WU C S. Two kinds of the Hermite polynomials[J]. College Physics, 2010, 29(3): 14-15. (in Chinese)
- [17] 王蒙, 陶俊琦, 程剑剑, 等. 物理学中常用的高斯与类高斯型积分[J]. 大学物理, 2021, 40(5): 13-19.
- WANG M, TAO J Q, CHENG J J, et al. Gaussian and Gaussian-like integrals in physics[J]. College Physics, 2021, 40(5): 13-19. (in Chinese)

(上接第7页)

在探讨如何为未来量子科技发展提供足够的人才,他们认为美国各地的本科院校和社区学院需要开设量子信息科学与技术课程^[3]。

5 结语

量子科技的发展前景极为广阔,但其教育领域面临诸多挑战,如教育转化困难、错误观念泛滥、师资不足等。要实现量子科技人才的培养目标,推动量子科技革命的顺利开展,必须从早期教育到高等教育进行全面变革。这需要创新教育方式,提高师资水平,编写优质教材,同时,教育工作者、科研人员以及社会各界应共同努力,提高大众

对量子科技的正确认知,促进量子科技知识从专业领域向大众常识的转化。此外,在未来的发展中,应积极鼓励和重视女性在量子科技领域的参与,充分发挥她们的智慧和创造力,推动量子科技在全球范围内的持续发展,使其对历史、文化、哲学和思想等领域产生更为深远的影响。

参 考 文 献

- [1] RULISON L. RPI envisions Hudson Valley as a quantum computing hub[N]. Times Union, 2024-11-01.
- [2] FERRIE C. Quantum physics for babies[M]. America: Sourcebooks Explore, 2017.
- [3] PERRON J, SHARIF S. Educators needed for a quantum future[J]. Physics Magazine, 2023, 16(4): 59.